Anweisung

zur

methodischen Behandlung

des

Rechenunterrichts

an Volksschulen und den unteren Klassen höherer Lehranstalten.

Von

Dr. Wilhelm Gies,

ordentlichem Lehrer am Gymnasium zu Fulda.

(Anstatt der zweiten Auflage des Leitfadens von Demselben.)

Fulda 1867.

In Kommission bei G. Nehrkorn.

J. L. Uth Buchdruckerei.

Vorwort.

In der nachstehenden Einleitung, in welcher der Verfasser seine Ansichten über die Methode des Rechenunterrichts im Allgemeinen darlegt, ist auch das Nöthige über den Zweck dieses Werkchens angegeben. Hier möge nur noch die Bemerkung Raum finden, weshalb derselbe zunächst diese Anweisung u. s. w. statt einer zweiten Auflage seines Leitfadens herausgibt. Der Leitfaden sollte ein Wegweiser für den Lehrer und zugleich ein Hilfsmittel für die Schüler sein, um dieselben bei den Repetitionen und häuslichen Arbeiten zu unterstützen. Er konnte diesen beiden Zwecken nur dann genügen, wenn der Lehrer mit der seiner Einrichtung entsprechenden Methode hinlänglich vertraut war. Die Methode ist aber wohl in keinem Gegenstande von so entscheidender Wichtigkeit als in dem ersten arithmetischen Unterrichte. Darum hängt der Erfolg desselben in den untern Klassen höherer Lehranstalten, für welche der Leitfaden hauptsächlich bestimmt war, wesentlich von der Art und Weise ab, wie dieser Unterricht in den Elementarschulen behandelt wird. Aber nicht bloß aus dieser Rücksicht hat sich der Verfasser auch zur Darstellung der untersten Lehrstufen entschlossen, er hofft auch dadurch jenen so wichtigen Anstalten mit seinen auf eine vieljährige Erfahrung sich stützenden Rathschlägen einen Dienst erweisen zu können, damit der Rechenunterricht an denselben immer mehr aus einem bloß mechanischen Hilfsmittel für das praktische Leben zu einem wahrhaften Bildungsmittel des

falls durch Maschinen ausgeführt werden kann, liegt eben die Gefahr, daß der Rechenunterricht mehr ein Hemmungs- als ein Förderungsmittel der geistigen Bildung werden kann. Eine Methode, welche nur diesen Mechanismus der arithmetischen Operationen ohne Einsicht in ihren Zusammenhang zum Ziele hat, kann sich dabei auf den in den Kindern ohnedies schon sehr regen Nachahmungstrieb und daneben nur auf das Gedächtniß, dem man nichts klar zu machen braucht, stützen und bietet noch den Vortheil dar, daß die Kinder, welche bald nach sogenannten Musterbeispielen arbeiten lernen, dadurch an eine mechanische Thätigkeit gefesselt werden, wobei keine geistige Aufmerksamkeit zu wecken und rege zu halten und Ruhe und Ordnung leicht zu handhaben sind. Hierdurch wird freilich das Unterrichten oder vielmehr Abrichten im Rechnen zu einem leichten Geschäfte, welches man nicht selten an höheren Lehranstalten solchen Lehrern überträgt, denen man wichtigere Gegenstände nicht glaubt anvertrauen zu dürfen. Diese geistlose mechanische Unterrichtsweise ist aber, wie ich dies aus vieljähriger Lehrerthätigkeit weiß, wobei ich Gelegenheit hatte Schüler aus den verschiedensten Anstalten und Gegenden kennen zu lernen, noch weit mehr vorherrschend, als man bei der Mühe und Sorgfalt, welche auf Begründung und Förderung einer bessern Methode seit Pestalozzi von bedeutenden Pädagogen verwendet worden ist, sollte erwarten dürfen. Das Abrichten ist freilich, wenn schon in allen Lehrgegenständen, so doch besonders im Rechnen die bequemste und, was den scheinbaren Erfolg betrifft, die dankbarste Unterrichtsmethode; indeß würde es doch unrecht sein, deshalb die Lehrer, welche den Rechenunterricht in dieser Weise behandeln, einer vorwiegenden Liebe zur Bequemlichkeit oder des Strebens nach dem äußern Scheine beschuldigen zu wollen. Die Hauptquellen des Uebels entspringen vielmehr aus äußern hindernden Umständen und daraus, daß gar mancher Lehrer keine hinreichende Gelegenheit gefunden hat, sich mit einer bessern Methode genügend vertraut zu machen.

Eins der allgemeinsten Hindernisse für die Durchführung einer alles Abrichten ausschließenden Methode im Rechnen liegt darin, daß die Volksschulen und meist auch die untern Klassen höherer

Lehranstalten mit Schülern überfüllt sind. In einem Gegenstande, der vorzugsweise mit dem Verstande aufgefaßt werden muß, ist es schwierig die Aufmerksamkeit und geistige Thätigkeit der Schüler stets rege zu erhalten. Eine stete Anregung, um die noch schlummernde Denkkraft zu wecken, ist aber die Hauptbedingung des Erfolgs einer auf das Denken berechneten Unterrichtsmethode. Um hier eine allseitige Theilnahme der Schüler zu bewirken, muß der Lehrer stets alle im Augen haben, damit er jeden, der aus Mangel an Aufmerksamkeit oder aus zu schwacher Fassungskraft nicht mehr weiter folgt, durch passende Fragen wieder in die Sache hineinzuziehen vermag. Dies ist bei kleinen Schülern kaum mit einer Klasse von 30—40 in genügender Weise durchzuführen, geschweige mit hundert und mehr von den verschiedensten Altersstufen, wie dies noch in der Regel in den Volksschulen vorkommt. — Schon dieser Uebelstand beweist, daß man diesen so wichtigen Anstalten noch lange nicht die Mittel und Fürsorge zuwendet, welche unserer heutigen Werthschätzung der geistigen Kräfte des Menschen entsprechen; das, was unter den gegenwärtigen Umständen, auch beim besten Willen der Lehrer, in den Volksschulen geleistet werden kann, steht nicht entfernt im Verhältnisse zur Zeit, welche die Kinder auf denselben zuzubringen haben.

Die Schwierigkeit, welche aus dem eben berührten Uebelstande für die Durchführung einer rationellen Methode überhaupt entspringt, ist für das Rechnen insbesondere in neuerer Zeit noch dadurch vermehrt worden, daß man — und dies nicht bloß in Kurhessen — die Anzahl der Lehrstunden für die Realien zu Gunsten eines Gegenstandes, der doch mehr erlebt sein will, als angelernt werden kann, allzusehr beschränkt hat. Auf dem Wege der Entwicklung der arithmetischen Lehren aus dem Verstande der Kinder heraus kann aber der Unterricht nur langsam fortschreiten; der Lehrer soll jedoch in einer vorgeschriebenen Zeit zu bestimmten Resultaten kommen. Das Publikum, die öffentliche Prüfung verlangen Erfolge, die in die Augen fallen. Der geistige Fortschritt der Kinder auf diesem Gebiete läßt sich nur dem nachweisen, der mit dem Gegenstande und seiner Methode gründlich

vertraut ist. Im gemeinen Leben versteht man unter Rechnen nur die mechanische Verbindung von Ziffern nach auswendig gelernten Regeln, mögen diese Kunststücke nun schriftlich oder im Kopfe ausgeführt werden. Es kann recht wohl vorkommen, daß ein in der Arithmetik ganz gründlich unterrichteter Schüler vor dem Urtheile von Geschäftsleuten u. s. w. nicht besteht, weil er nicht die maschinenmäßige Sicherheit in der Ausführung bestimmter Formeln sich angeeignet hat, die ein darauf bloß dressirter besitzt, während jener vielleicht unabhängig von diesen Kunststücken seinen eignen Weg selbstständig gesucht hat und im Stande sein wird auch diese, wenn er erst ihren Sinn erkannt hat, sich leicht anzueignen und dann mit weit mehr Geschick zu handhaben.

Aber nicht bloß in den äußern Hindernissen dürfen wir den Grund suchen, weshalb der Rechenunterricht nur selten den Anforderungen entspricht, welche man an denselben stellen muß, wenn er ein Bildungsmittel des Verstandes sein soll. Eine andere noch allgemeinere Ursache von der fehlerhaften Behandlung desselben ist in den unrichtigen Ansichten zu suchen, welche die Lehrer über diesen Gegenstand hegen, wofür man sie selbst aber am wenigsten verantwortlich machen kann. Nicht jeder Lehrer kann alles lehren. Ein guter Lehrer im Rechnen muß diesen Gegenstand nicht bloß in viel weiterem Umfang, als unmittelbar zu seinem Lehrpensum gehört, beherrschen, er muß selbst die Beschäftigung damit liebgewonnen, er muß sich die geistige Gewandtheit, wie sie grade diesem Fache entspricht, erworben haben, eine klare, anschauliche Darstellungsweise und Geschick im Stellen von Fragen, welche die Schüler kurz und bestimmt auf das Wesen der Sache hinweisen. Ueber eine solche Lehrkraft würde man in mehrklassigen Anstalten eher verfügen können, wenn man sich nicht in neuerer Zeit wieder häufiger durch das Zurückgehen auf das sog. Klassensystem in der Auswahl derselben beschränkt hätte. Man verspricht sich zwar von dieser Einrichtung bessere Erfolge in der Erziehung, aber man übersieht dabei, daß die Schule kein wirksameres Mittel die Jugend zu veredeln besitzt, als eben den Unterricht selbst, welcher in allen sich für diesen Zweck gegenseitig ergänzenden

Fächern Geist und Gemüth der Schüler zu erfassen und zu heben im Stande sein soll.

Aber selbst Lehrer, welchen es weder an Geschick noch an Kenntnissen fehlt, um den Rechenunterricht mit gutem Erfolge ertheilen zu können, verfahren dabei nicht in sachgemäßer Weise. Sie handeln ohne Zweifel in gutem Glauben, wenn sie, eingedenk des Grundsatzes, daß es überall mehr auf das Können als auf das Wissen ankommt, nicht dem langwierigen Wege der nur ganz allmählig fortschreitenden Entwickelung von Wissen und Können, sondern dem weit rascher zum Ziele führenden des Abrichtens, wobei die Schüler sogleich absehen, was der Lehrer vormacht, als dem ächt praktischen Verfahren den Vorzug geben. Sie werden in ihrer Ansicht bestärkt durch die Art und Weise, wie sie die arithmetischen Lehren meist in Büchern dargestellt finden. Manche dieser Werke haben fast keinen andern Inhalt, als die Beschreibung des mechanischen Verfahrens, hier und da mit einer unzureichenden Erläuterung oder mit einer nachträglichen Probe über die Richtigkeit desselben. Die große Mehrzahl führt schon dadurch den Lehrer auf den unrichtigen Weg, daß sie für die Zwecke des Unterrichts den Stoff nicht anders ordnet, als dies in einem wissenschaftlichen Systeme stattfindet. Der Unterricht muß aber ein ganz anderes Princip einhalten, er muß von den leichtern zu den schwierigern Materien, von den einfachern und anschaulichern, zu den zusammengesetztern und abstractern fortschreiten. Die Schüler müssen allerdings zuvor das Nummeriren gründlich gelernt und geübt haben, ehe sie den Mechanismus der vier Spezies begreifen können. Aber wenn ein Lehrer glaubt deshalb mit der vollständigen Erklärung des Zahlensystems den Unterricht beginnen zu müssen (wie dies wirklich in einer Anleitung angerathen wird) so wird er obigen Zweck sicher verfehlen. Ich habe bei zahlreichen Prüfungen nicht einen Schüler gefunden, der mit dem Zahlensystem hinlänglich vertraut gewesen wäre, um darauf die Erklärung eines wenn auch nur sehr leichten Falles der Multiplikation oder Division stützen zu können. Weit mehr Einsicht legten dieselben schon bei der Rechnung mit benannten Zahlen an den Tag. Daß sie z. B. den 48ten Theil von 576 Sgr.

erhalten würden, indem sie den 4ten Theil von 576 Pf. suchten fanden sie wohl, aber in derselben Weise zu erklären, daß man, statt den 30ten Theil von 780 zu suchen den 3ten von 78 nehmen könnte, war ihnen unmöglich. Aber freilich für die Rechnungen mit benannten Zahlen wurde ihnen auch die Eintheilung von Maß und Gewicht u. s. w. hinlänglich erklärt und sie mußten zuvor zahlreiche sog. Reductionen und Resolvirungen vornehmen, ehe man ihnen das Addiren u. s. w. zumuthen konnte. Es ist deshalb auch im Interesse des Rechenunterrichtes zu bedauern, daß das Decimalsystem in unserm Maß- und Münzwesen immer noch nicht durchgeführt ist, sonst würde man schon aus Rücksicht auf den praktichen Nutzen das Zahlensystem mit den Kindern gründlicher durcharbeiten und dann auch zur Ueberzeugung gelangen, daß man damit für das Verständniß und die geschickte Handhabung des Mechanismus der vier Spezies erst eine sichere Grundlage gewinnt, auf welche gestützt man diese sog. vier Spezies in einer gründlichern Weise lehren kann, als es bis jetzt in der Regel stattfindet; man würde es dann z. B. wohl auch einsehen, daß die beiden Fälle der Division, welche man als Theilen und Messen unterscheidet, von vorn herein getrennt behandelt werden müssen, weil man dann auch einen verschiedenen Sinn mit diesen Operationen verbinden würde.

Viel elementarer als beim Multipliciren und Dividiren geht man meistens bei der Einleitung in die Bruchrechnung zuwege, oft umständlicher, als es nothwendig und nützlich ist; aber diese Anschaulichkeit und Gründlichkeit vermißt man meist auch hier wieder beim weitern Fortschreiten zu den wichtigsten Lehren. In einem und demselben Lehrbuche wird der Bruch beim Heben als Quotient des Zählers durch den Nenner, beim Addiren und Subtrahiren als Zahl behandelt, deren Einheiten durch den Nenner bestimmt werden, ohne daß man es für nothwendig gehalten hätte, die wichtige Beziehung zwischen beiden hinlänglich scharf und anschaulich darzustellen. Ebenso ungründlich ist meist die Lehre von der Multiplikation und Division behandelt, wo es nur darauf abgesehen scheint, so rasch als möglich die mechanischen Regeln zu

gewinnen, von denen man dann freilich nicht begreift, wozu sie den Schülern nützen sollen, die, wenn sie die Multiplikation und Division mit ganzen Zahlen gründlicher zu verstehen und anzuwenden gelernt hätten, dieser Kunststücke für den praktischen Gebrauch gar nicht bedürften. Diese flüchtige Behandlung der Multiplikation und Division der Brüche findet man selbst da, wo man glaubt die Proportionen für die Auflösung der sog. Regeldetriaufgaben beibehalten zu müssen. Freilich nimmt man es hierbei mit der Begründung der Proportionen nicht genau; würde man dies thun, so würde man sich auch bald überzeugen, daß die Proportionen nicht ein Hilfsmittel, sondern ein Hinderniß für klares Auffassen und gewandtes Behandeln der Rechenaufgaben sind. So müßten doch z. B. bei der Aufgabe: Wie viel betragen die Zinsen von 75 Thlr. zu 5 Proc.? — die Schüler zur Begründung der entsprechenden Proportion $100:75=5:x$ folgern: weil 75 $^3/_4$ von 100 beträgt, so ist auch $x = {}^3/_4 \, . \, 5$. Sind sie sich aber dessen bewußt geworden, so werden sie nicht mehr, um x zu berechnen, von obiger Proportion Gebrauch machen. Oder nehmen wir einen schwierigern Fall: Von zwei Arbeitern verdient der erste (A) in 12 Tagen so viel, als der andere (B) in 15. Nun betrug der monatliche Lohn des A 30 fl., wie viel verdiente B in dieser Zeit? — Die Proportion heißt hier $15:12=30:x$. Davon wird man aber in einem Unterrichte, der bilden und nicht abrichten soll, eine Begründung fordern. Den Schluß: je mehr B arbeiten muß, um ebenso viel als A zu verdienen, desto weniger verdient er in derselben Zeit, wird man doch wohl nicht für eine Begründung gelten lassen, denn sonst wäre auch dieser Schluß richtig: je höher die Temperaturen sind, desto größer sind auch die Spannkräfte der Dämpfe, also sind die Temperaturen und die entsprechenden Spannkräfte einander proportionirt. Mit solchen Oberflächlichkeiten bildet man nicht den Verstand, sondern man verdirbt ihn, indem man an Flüchtigkeit und Unklarheit im Denken gewöhnt. Der Beweis der Richtigkeit obiger Proportion erfordert vielmehr den Schluß: weil B $^{15}/_{12}$ d. i. $1^1/_4$ mal länger arbeiten muß, um dasselbe zu verdienen, wird er für die nämliche Zeit $1^1/_4$ mal

weniger als A empfangen. Dies führt aber direkt zur einfachen Ausführung der Division 30 : $1\frac{1}{4}$. Noch klarer aber wird der Schüler sich des Grundes, von dem er beim Ansatze der Proportion höchstens eine dunkle Ahnung hat, bewußt, wenn er schließt: weil B in 15 Tagen so viel verdient, als A in 12, so verdient er in 1 Tage nur $^{12}/_{15} = ^{4}/_{5}$, also auch in einem Monate $^{4}/_{5}$ vom Lohne des A. — Man gebe nur einem auf die Proportionen gut dressirten Schüler folgende Aufgabe: $11^{2}/_{3}$ Pf. einer Waare kosten ebenso viel, als $10^{8}/_{9}$ Pf. einer andern. Nun kauft man das Kilogr. der letztern für 4 Fr. 75 Cent., wie theuer ist ein Kilogr. der erstern? — Man wird sehen, wie er hierbei im Dunkeln tappt, während ein an ein wirkliches Denkrechnen gewöhnter einfach schließen wird: Weil $11^{2}/_{3}$ Pf. der erstern Waare ebenso viel kosten, wie $10^{8}/_{9}$ Pf. der letztern, so kostet 1 Pf. $11^{2}/_{3}$ mal weniger, also nur so viel, als $10^{8}/_{9} : 11^{2}/_{3} = ^{14}/_{15}$ Pf. der zweiten, so hat auch ein Kilogr. der erstern nur den Werth von $^{14}/_{15}$ Kilogr. der letztern. Uebrigens ist dies Beispiel, welches ich einer bekannten Aufgabensammlung entnommen habe, recht gut gewählt, um die Schüler der mittlern Klassen höherer Lehranstalten in der Begründung der Proportionen, von denen sie in der Geometrie, Physik und Chemie eine nützlichere Anwendung machen können, zu üben. (Diese Begründung würde hier sein: Weil man von der ersten Waare $^{5}/_{4}$ mal mehr Pf. für dasselbe Geld erhält, so ist sie $^{5}/_{4}$ mal billiger als die andere.) — In den untern Klassen bereitet man aber auf diese Uebungen am besten vor, indem man die Aufgaben in obiger Weise durch einfache Schlüsse lösen läßt, ohne dabei von dem Apparate der Proportionen selbst Gebrauch zu machen.

Das angewandte Rechnen wird indeß in den meisten Lehrbüchern mit weit mehr Sorgfalt und Geschick behandelt, als die reine Zahlenlehre; dies geschieht nicht bloß aus Rücksicht auf die Zwecke des praktischen Lebens, sondern man hält erst diesen Stoff für geeignet, um die Denkkraft der Schüler daran zu üben. Man nennt daher auch wohl diese Uebungen erst das Denkrechnen und glaubt damit das Abrichten im Vollziehen der eigentlichen arith-

methischen Operationen rechtfertigen zu können. Diese Ansicht halte ich aber, sowohl was den praktischen Nutzen als was das bildende Element im Rechnen betrifft, nicht für begründet. Was nämlich den ersten Punkt betrifft, so lernen allerdings die Schüler dadurch hierher gehörige Verhältnisse des praktischen Lebens beurtheilen, aber diese Befähigung, welche sie sich auf der Schule nur mit Mühe und großem Zeitaufwand erwerben können, kommt ihnen später im Leben von selbst; was ihnen aber nicht von selbst kommt, ist die Einsicht in das rein Arithmetische dieser Aufgaben. Mühselig sieht man oft Schüler der höhern Klassen und geübte Geschäftsleute mit den Zahlen sich abquälen, die sie eben nicht praktisch zu behandeln verstehen, weil sie auf der Schule nicht die nöthige Einsicht in die Eigenschaften derselben und in die Beziehungen der arithmetischen Operationen zu einander gewonnen haben. — Was dann den zweiten Punkt, die Förderung der geistigen Bildung durch das Rechnen betrifft, so wird durch die vorausgehende mechanische Dressur im Rechnen den Schülern die Gedankenlosigkeit bei diesem Geschäfte so sehr zur andern Natur, daß sie später durch das sog. Denkrechnen nicht wieder auszutreiben ist. So, wie das Rechnen häufig getrieben wird, erfordert das Erlernen des geringsten Handwerks mehr geistige Aufmerksamkeit; denn die Schüler thun dabei kaum etwas anders, als daß sie Ziffern machen und ordnen mit Hilfe des Gedächtnisses und des äußern Sinnes, ohne Bewußtsein des innern Zusammenhangs der angewandten Mittel mit dem zu erreichenden Zwecke. Aus dieser geistlosen Beschäftigung erklärt sich denn auch die bekannte Erfahrung, daß oft die beschränktesten Köpfe die sichersten Arbeiter auf diesem Felde sind. Will man dieselben aber einen andern Weg führen, als für den sie eingeschult sind, so zeigen sie sich gänzlich ungelenk, oder will man ihnen die Gründe über ihr Thun klar machen, so begreifen sie gar nicht, was man sie noch über Dinge lehren will, die sie längst machen können. Thätige Aufmerksamkeit, geistiges Leben ist in eine Klasse, in welcher so dressirte Schüler überwiegen, kaum wieder hineinzubringen. Dies mögen insbesondere die jüngern Lehrer der Mathematik an höhern

Lehranstalten bedenken, denen meist der Rechenunterricht in den untern Klassen anvertraut ist. Die größere Lebendigkeit und Energie, welche ein Vorzug junger Lehrkräfte ist, kommt ihnen namentlich auch bei diesem Gegenstande sehr zu statten; aber weil ihr Interesse noch mehr auf eine wissenschaftliche Beschäftigung mit der Mathematik gerichtet ist, halten sie wohl das gemeine Rechnen für einen zu unwichtigen Gegenstand, um sich mit der Methode desselben hinlänglich vertraut zu machen. Wenn sie aber auch eine rege Theilnahme für die Sache und der beste Wille beseelt, so finden sie doch an dem Material, welches ihnen in der Regel in die Hände geliefert wird, fast unüberwindliche Schwierigkeiten. Die Freude des Lehrers am Unterrichte entspringt hauptsächlich aus den Fortschritten der Schüler; mit Schülern, welche aber für geistige Thätigkeit in diesem Gegenstande abgestumpft sind, kann der Fortschritt auf dem Wege der verstandesmäßigen Entwicklung anfangs nur kaum merklich stattfinden; er wird aber gar nicht möglich, wenn der Lehrer aus Unkenntniß einer guten Methode dabei nicht anschaulich und elementar, sondern abstrakt und wissenschaftlich zuwege gehen will. Der gute Wille des Lehrers wird an der vergeblichen Arbeit bald erlahmen und er wird sich am Ende auch mit der Ansicht befreunden, daß das bloße Abrichten im Rechnen in den untern Klassen höherer Lehranstalten um so weniger nachtheilig sei, als ja der nachfolgende mathematische Unterricht die fehlende Begründung doch viel vollständiger zu geben vermöge. — Aber hierin liegt eine zweifache Täuschung. Die mathematischen Beweise sind wesentlich verschieden von der Art der Begründung, wie sie ein methodisch richtig ertheilter Rechenunterricht geben soll; die erstern sind abstrakte Folgerungen aus Axiomen, Definitionen und Lehrsätzen, und das Bilden einer Kette von Schlüssen ist dabei die wichtigste Uebung. Der Rechenunterricht soll dagegen seine Lehren möglichst unmittelbar aus der Anschauung der gegebenen Verhältnisse entwickeln. Das Anschauungsvermögen muß aber schon aus psychologischen Gründen früher geübt werden, als das Schlußvermögen: außerdem bildet seine Entwicklung eine Grundbedingung für das Gedeihen des mathe-

matischen Unterrichts. Wird dasselbe in den untern Klassen der Gymnasien, wo die Schüler sich fast ausschließlich mit den Elementen mehrerer fremden Sprachen beschäftigen müssen, nicht geweckt und gepflegt, so verkümmert es, wenigstens im Kreise der Zahlenanschauungen, in einer Weise, daß man dann in den obern Klassen staunen muß über den Grad von Unfähigkeit, welchen manche sonst eben nicht beschränkte Schüler für die Mathematik, die sonst jeden wohl befähigten und wohl geleiteten Schüler anziehen muß, an den Tag legt. Freilich, wenn das Ziel des mathematischen Unterrichts nur im Erlernen von Lehrsätzen und ihren Beweisen besteht, dann reicht der dürrste Verstand dafür aus. Aber von der Mathematik gilt ebenso gut und vielleicht noch mehr als von andern Fächern, daß zum Wissen auch das Können hinzukommen muß. Ist es schon der Mühe werth für den, der sich den Wissenschaften widmen will, an der Beschäftigung mit der Mathematik sich ein Musterbild für wissenschaftliche Darstellung und Begründung einzuprägen, oder für den, der sich einem praktischen Berufe zuwenden will, aus der Mathematik die wichtigsten Vorschriften und Hilfsmittel für denselben sich anzueignen, so ist es doch noch ein viel größerer Gewinn, an ihr sich die Selbstständigkeit und Selbstthätigkeit im Denken zu erringen, wozu grade sie die Mittel und Wege darbietet. Nur die Mathematik kann so gelehrt werden, daß der Schüler alle Wahrheiten als Produkte seiner eignen Denkthätigkeit auffindet und erkennt; an der Beschäftigung mit derselben kann er am sichersten und ohne alle Gefahr für krankhafte Frühreife das Verknüpfen schon bewußter Wahrheiten zur Entdeckung neuer üben, die er sogleich auf die Probe stellen kann, um jeden Trugschluß leicht zu entdecken; nur dadurch, daß der Schüler sich mit der Lösung mathematischer Probleme selbstthätig und selbstständig beschäftigt, eignet er sich an ihr eine geistige Ausdauer und Vertiefung an, die eine Hauptbedingung für das gründliche Studium der Wissenschaften ist. Erst aus dem Gelingen solcher selbstständiger Kombinationen, wie sie der Lösung mathematischer Aufgaben zu Grunde liegen, entspringt auch die Freude an der Beschäftigung mit der Mathematik, aus welcher wieder die dazu

nöthige Kraft und Ausdauer geschöpft wird. Aber dies Gelingen beruht grade auf der Klarheit und Schärfe des innern Sinnes, für welche wenigstens im Gebiete der Zahlenanschauungen hauptsächlich durch den Rechenunterricht der Grund gelegt werden kann. Beschränkt man aber diesen in den untern Klassen auf das Einüben mechanischer Fertigkeiten, so entwickelt man nicht, man unterdrückt vielmehr das Anschauungsvermögen in dieser Richtung.

Wie wenig übrigens im Allgemeinen der Rechenunterricht dem nachfolgenden mathematischen vorzuarbeiten pflegt, das erhellt schon aus den Lehrstoffen, womit man noch häufig die mittlern Klassen beschäftigt. Für Tertianer passen z. B. nicht mehr die Decimalbrüche, noch viel weniger bildet das Wurzelausziehen für Sekundaner einen geeigneten Uebungsstoff, und der Verfasser des verbreitetsten, sonst ganz vortrefflichen Uebungsbuches für allgemeine Arithmetik und Algebra würde die 6—8 ersten Paragraphen desselben, deren vollständige Abhandlung vielleicht schon manchem Schüler von vornherein die Lust an der Mathematik verleidet hat, wohl in einen einzigen zusammengezogen haben, wenn er einen bessern Rechenunterricht hätte voraussetzen dürfen, als wie dieser leider gewöhnlich noch ertheilt wird.

Die Ueberzeugung, daß der mathematische Unterricht durch die Art und Weise, wie der vorausgehende Rechenunterricht ertheilt wird, wesentlich gefördert oder gehemmt werden kann, veranlaßte den Verf. vor einer Reihe von Jahren zur Abfassung eines Leitfadens für diesen Unterricht an den untern Klassen höherer Lehranstalten. Schon damals sprach er in der Vorrede zu diesem Werkchen die Ansicht aus, daß der Rechenunterricht an höhern Lehranstalten (statt der Fertigkeit in den vier Spezies in ganzen Zahlen, welche man gewöhnlich bei der Aufnahme verlangt) einen doppelten Anschauungskursus zur Voraussetzung haben sollte, von denen der erste ohne allen Gebrauch der Ziffern, der zweite nur mit kleinen, höchstens dreiziffrigen Zahlen durchgeführt werden müsse. An dieser Ueberzeugung hält er auch jetzt im Wesentlichen noch fest und da ihm der Wunsch ausgesprochen worden ist, eine neue Auflage jenes Leitfadens zu veranstalten, in welcher zugleich auf

die Bedürfnisse der Lehrer an Volksschulen mehr Rücksicht genommen werde, so ergreift er diese Veranlassung, um seine aus vieljähriger Erfahrung hervorgegangenen Ansichten in einem für den Lehrer bestimmten Wegweiser ausführlich darzulegen. Er hofft damit sowohl den Lehrern an Volksschulen als besonders auch seinen jüngern Kollegen an höhern Lehranstalten einige Dienste zu erweisen. Aus diesem doppelten Zwecke entspringen freilich auch Mängel in der Auswahl und Darstellung des Stoffs, die er den einen Theil seiner Leser bittet mit der Rücksicht auf den andern entschuldigen zu wollen.

Die Methode, nach welcher gemäß der Ansicht des Verf. der Rechenunterricht ertheilt werden soll, ist im Vorhergehenden schon wiederholt als die der Entwicklung bezeichnet worden. Es ist damit selbstverständlich keine wissenschaftliche Deduktion gemeint; das Rechnen hat aber das mit der Mathematik gemein, daß alle Lehren von den Schülern selbst unter Anleitung des Lehrers aus dem Wesen der Sache entwickelt werden können; den Schülern darf keine Regel vom Lehrer vorgesagt und bewiesen werden, noch viel weniger dürfen sie Regeln üben, von denen sie die Gründe, den innern Zusammenhang zu durchschauen noch nicht im Stande sind. Diesen Grundsatz muß sich der Lehrer unter allen Umständen zur Pflicht machen und darf sich durch keine andere Rücksicht darin beirren lassen. Es gibt genug Stoff im Rechnen, den auch die kleinern Schüler vollständig zu begreifen im Stande sind und was sie noch nicht begreifen können, damit hat es auch für die Uebungen noch Zeit. Der Lehrer muß immer bedenken, daß die geistige Bildung auch in den Volsschulen das Wichtigere ist, was er fördern soll, und er darf die Ueberzeugung hegen, daß, wenn er dies Ziel im Rechenunterricht verfolgt, auch im praktischen Rechnen nichts versäumt wird. Die unbegriffnen Rechenkünste, so fix und fertig sie auch in der Schule gemacht werden, vergessen sich gar bald wieder, während ein Schüler, der ein beschränktes Feld in der Arithmetik mit seinem Verstande beherrscht, auch damit im praktischen Leben viel weiter reicht.

Der Weg der stetigen Entwicklung aller arithmetischen Lehren

durch die Selbst- und Mitthätigkeit der Schüler erfordert, daß man zunächst von möglichst einfachen Beispielen ausgeht, die aus dem Gesichtskreise der Schüler entnommen sind und in der anschaulichsten Weise dargestellt werden. Die Schüler müssen aus einer Anzahl in einer gewissen Mannigfaltigkeit gewählter Beispiele die Regel als das den Beispielen Gemeinsame erkennen und üben lernen, die sie aber nicht immer, wenigstens im Anfange nicht und überhaupt auf der Volksschule nur ausnahmsweise in Worten auszudrücken brauchen. — Wenn im Nachfolgenden diese Entwicklung meist nur an einem und zwar sogleich an einem in größern Zahlen ausgedrückten Beispiele durchgeführt wird, so geschieht dies nur aus Rücksicht auf die hier zu erstrebende Kürze der Darstellung.

Das geistige Vermögen, auf welches sich die Kinder bei dieser Thätigkeit hauptsächlich stützen müssen, ist das innere Anschauungsvermögen, dessen Ausbildung in der frühesten Jugend überhaupt für die geistige Entwicklung von der höchsten Bedeutung ist. Dieser innere Sinn entwickelt sich erst durch die Thätigkeit des entsprechenden äußern; für diesen ist aber im Anfange die Bezeichnung der Zahlen durch Ziffern ein ungenügendes Hilfsmittel, welches die mit den Worten zu verbindende Vorstellung nicht anzuregen vermag. Es ist daher kein Wunder, daß die Kinder das Rechnen alsbald nur noch in das mechanische Operiren mit den Ziffern setzen. An diese Gedankenlosigkeit bei der Beschäftigung mit Zahlen werden sie leider schon durch einen gut gemeinten Mißbrauch im elterlichen Hause gewöhnt, wo man sie meist zuerst das Zählen, d. h. das gedankenlose Herplappern von Zahlwörtern lehrt. Dies Verfahren setzt sich dann in der Schule fort, wo man glaubt durch das mechanische Ab- und Zuzählen in sog. Reihen recht methodisch zu wege zu gehen. Hierauf folgt in derselben Weise das Einmaleins, welches sich doch die Kinder zuerst selbst gebildet haben müßten, um es recht verstehen zu können. Nicht einmal den Grund von der Vertauschung der Faktoren lernen sie zuvor einsehen, was man doch gar nicht würde umgehen können, wenn etwas bei diesen Dingen gedacht würde. Jedes Kind fühlt, daß es zunächst nicht ein und dasselbe ist, ob es 4 Dinge 3 mal, oder 3 Dinge 4 mal

erhält. Gibt man ihm darüber keinen Aufschluß, so wird es später überhaupt einen solchen nicht für nöthig halten. Dieser Gedankenlosigkeit muß von vorn herein entgegengetreten werden, wenn der Rechenunterricht an den Volksschulen nicht ein Verdummungs- sondern ein Bildungsmittel werden soll. Dafür kennt der Verf. kein wirksameres Mittel, als daß im Anfange das Ziffer- und auch das Kopfrechnen, so wie es gewöhnlich getrieben wird, ganz ausgeschlossen bleiben muß. Die Kinder müssen vielmehr die ersten Uebungen mit Hilfe von Veranschaulichungsmitteln ausführen, welche sie nöthigen mit den Worten auch die entsprechenden Vorstellungen zu verbinden und zwar müssen sie daran nicht etwa bloß zählen lernen, sondern sie müssen jede Zahl (deren Reihe jedoch höchstens bis 100 fortgesetzt werden darf) mit ihren wichtigsten Eigenschaften, sowie den Zusammenhang derselben unter einander als Summen, Differenzen, Produkte u. s. w. kennen lernen. Hierdurch wird aber ihr innerer Sinn nicht bloß im Allgemeinen für Zahlenanschauungen geweckt und geübt, sondern sie schärfen den Blick auch noch insbesondere für die wichtigsten besondern Eigenschaften der Zahlen, deren Beachtung für das praktische Rechnen von so großer Bedeutung ist. Was nützt es z. B. den Schülern, wenn der Lehrer einige hübsche Beispeile nach der sog. wälschen Praxis vor ihnen rechnet, da sie sich selbst nicht die Fähigkeit zu rascher Beurtheilung der Zahlen für diesen Zweck erworben haben?

Mit diesen Anschauungsübungen können die Kinder recht füglich ein Jahr lang täglich eine halbe Stunde (länger sollte man ihre Aufmerksamkeit in einem stete geistige Thätigkeit erfordernden Gegenstande nicht in Anspruch nehmen) auf das Zweckmäßigste beschäftigt werden. Auf dieselben lassen wir einen zweiten Kursus folgen, der ebenfalls noch zum vorbereitenden Anschauungsunterricht gerechnet werden kann, obgleich darin von den Ziffern Gebrauch gemacht werden soll. Aber zunächst sollen die Uebungen des vorigen Kursus mit den in Ziffern dargestellten Zahlen wiederholt werden und dann erweitern wir sie in der Weise, daß es den Kindern noch leicht fällt, gestützt auf die im vorigen Kurses gewonnenen Zahlenanschauungen, die Vorstellung von der Bedeutung

der Zeichen und ihrer Verbindungen festzuhalten. Zu diesem Ende rechnen wir nur mit kleinen, höchstens dreiziffrigen Zahlen und lösen nur Aufgaben, in welchen alle Beziehungen von den Kindern noch leicht durchschaut werden können. Mit dieser Einschränkung sind wir aber keineswegs in der Mannigfaltigkeit der Uebungen so beschränkt, daß nicht mindestens ein Jahr mit täglich einer halben Lehrstunde denselben eingeräumt werden dürfte. Ja, es dürften sich die Lehrer, welche den Rechenunterricht an den untern Klassen höherer Lehranstalten zu ertheilen haben, glücklich schätzen, wenn sie bei den in die Sexta Aufzunehmenden statt der geforderten Fertigkeit in der Ausführung der vier Species nur eine derartige Vorbereitung vorfänden, wie sie durch diese beiden ersten Kurse erworben werden kann. Die Schüler brächten dann wirklich Kenntnisse mit und an Fertigkeit doch nicht weniger, wenn auch von anderer Art; was aber die Hauptsache ist, während jene Ziffernmacher nur mit der größten Mühe wieder dahin zu bringen sind, beim Rechnen mit dem Denkvermögen statt mit der Nachahmungsgabe thätig zu sein, werden diese Schüler dem Lehrer mit dem Streben entgegen kommen, alles, was sie im Rechnen zu treiben haben, geistig zu durchdringen und sich zur klaren Anschauung zu bringen.

Auf diese beiden Vorbereitungskurse lassen wir zur vollständigen Durchführung eines Rechenunterrichts, wie er für die gewöhnlichen drei untern Klassen höherer Lehranstalten paßt, noch drei je einjährige Lehrgänge folgen. Die nachfolgende theilweise sehr gedrängte Darstellung derselben sucht zwar alles Wesentliche zu berühren, jedoch nur in ungleichmäßigem Verhältnisse, da sie kein Lehrbuch, sondern nur ein Wegweiser für den Lehrer sein soll und zwar hauptsächlich in Rücksicht auf diejenigen Lehren, welche die methodisch schwierigern sind oder in deren Behandlung man häufig nicht hinlänglich gründlich verfährt. Dabei hat der Verf. die Anforderungen der Volksschule wie die der höhern Lehranstalten im Auge gehabt, welche ohnedies in diesem Lehrgegenstande im Wesentlichen übereinstimmen, nur daß in manchen Lehren eine größere Ausführlichkeit und Gründlichkeit auf den letztern verlangt

werden muß. So darf z. B. die Lehre von den Faktoren, das Rechnen mit Summen, Differenzen, Produkten u. s. w. auch auf der Volksschule nicht vernachläßigt werden, nicht bloß weil die daran sich knüpfenden Uebungen Gewandtheit im praktischen Rechnen, insbesondere im Kopfrechnen sehr zu fördern vermögen, sondern weil sie auch geistige Thätigkeit und Interesse in den sonst häufig allzu mechanischen Schlendrian des Ausrechnens bringen, indem sie die Aufmerksamkeit der Schüler auf die Eigenschaften der Zahlen und ihrer Verbindungen lenken und dieselben dadurch anregen, sich ihre eignen bequemern Wege zu suchen. Für die höhern Lehranstalten haben aber diese Regeln noch eine besondere Bedeutung, da sie nach der vieljährigen Erfahrung des Verfassers sehr geeignet sind, den Schülern das Auffassen der Buchstabenrechnung und das Umformen zusammengesetzter Ausdrücke, insbesondere beim Auflösen der Gleichungen sehr zu erleichtern.

Daß die Vorschläge des Verfassers zur Verbesserung der Methode des Rechnens selbst noch sehr der Verbesserung fähig sind, bescheidet er sich gerne zuzugestehen; daß es aber auf seinem Wege möglich ist, das Abrichten der Schüler ohne Beeinträchtigung der Fortschritte in den nothwendigen mechanischen Fertigkeiten zu beseitigen, davon hat er sich selbst unter dem ungünstigen Umstande, daß die Schüler nicht für sondern gegen diese Methode vorbereitet waren, vielfach zu überzeugen Gelegenheit gehabt. Möchte es ihm gelingen durch diese kleine Arbeit etwas dazu beizutragen, um die Ueberzeugung, daß das Abrichten der Schüler im Rechnen ein höchst verderblicher Mißbrauch ist, der beseitigt werden muß und beseitigt werden kann, immer allgemeiner zu verbreiten.

Erster Lehrgang.

Anschauungsunterricht.

Der Gebrauch der Ziffern ist ausgeschlossen. Die Kinder bedienen sich zur Bezeichnung der Einheiten gleichartiger Gegenstände; am besten nehmen sie dafür kleine Würfel oder in Ermangelung derselben auch Bohnen. Diese Dinge nennen die Kinder anfangs auch nur Würfel oder Bohnen u. s. w., dann aber müssen sie sich darunter auch andere gleichartige Gegenstände denken und erst später führt man dafür die abstrakte Bezeichnung Einheit ein. Wie nun die Kinder damit operiren müssen, um sich die ersten Anschauungen über Zahlen und Zahlenverhältnisse und damit die wichtigste Grundlage für das spätere Kopf- und Zifferrechnen zu erwerben, dies wird wohl am besten durch einige in Form einer Lektion dargestellte Beispiele klar gemacht werden können.

In der ersten Lehrstunde wird man sich vorzugsweise mit der Zahl 4 zu beschäftigen haben. Nachdem die Kinder vier Einheiten abgezählt haben, werden sie damit diese Fragen beantworten: Nehmet von den 4 eine Einheit weg, wie viel bleiben? Also 1 von 4 bleibt ? 3 und 1 gibt ? Nehmt 2 Einheiten weg, wie viel bleiben? Also 2 und 2 gibt? 2 Einheiten machen ein Paar, wie viel Paare könnt Ihr aus 4 machen? — 2 Paare geben also? — Eine Mutter gibt ihren 2 Kindern 4 Aepfel, dem einen so viel wie dem andern, wie viel erhält jedes? Die Hälfte von 4 ist also? Ein Kind erhielt 4 Aepfel zum Geschenk, nachdem es davon einen gegessen hatte, wie viel hatte es noch übrig? Es wollte aber den ersten Tag die Hälfte davon verzehren, wie viel blieben ihm noch für den folgenden Tag? Ein Knabe erhielt 4 Kreuzer zum Geschenk; er kaufte sich nun für 3 Kr. einen Bleistift. Wie viel Geld blieb ihm noch übrig? — Ein anderer erhielt ebenfalls 4 Kr. und kaufte sich dafür Bilderbogen, von denen einer 2 Kr. kostete, wie viel Bogen erhielt er?

In dieser Weise schreite der Unterricht von Zahl zu Zahl stetig fort, um die Eigenschaften einer jeden durch um so mannigfaltigere mit Hilfe der die Einheiten versinnlichenden Marken zu lösende Aufgaben zur Anschauung zu bringen, je größer und zusammengesetzter dieselbe ist. Insbesondere muß der Zahl zehn eine größere Sorgfalt gewidmet werden, weshalb wir hier noch einen Augenblick dabei verweilen wollen. Vor allem müssen die Kinder alle möglichen Zahlenpaare aufsuchen und ihrem Gedächtnisse einprägen, welche zusammen zehn geben. Man wird ihnen zu diesem Behufe Aufgaben dieser Art stellen: Legt 6 Einheiten in eine Reihe und legt dann noch so viele in eine zweite Reihe darunter, daß es zusammen 10 gibt. Welche zwei Zahlen geben hier also zusammen 10? — Ein andermal: Legt 10 Einheiten in eine Reihe und nehmt 4 davon, wie viel bleiben liegen? Also 4 von 10 bleibt? 6 und 4 gibt? — Ein Kind fand in einem Garten unter einem Baume 6, unter einem andern 4 Aepfel, wie viele hatte es? — Ein Knabe hatte 10 Nüsse, er aß den ersten Tag 6 davon, wie viel blieben ihm für den zweiten übrig? Eine Mutter beschenkte ihre zwei Kinder mit 10 Aepfeln und zwar erhielt das ältere 2 mehr als das jüngere, wie viel erhielt jedes? — Alle diese Fragen, welche sich auf dieselbe Verbindungsweise der nämlichen Zahlen beziehen, sollen nicht unmittelbar hinter einander folgen, sondern müssen z. Th. als Wiederholung in der nächsten Stunde gestellt werden. In ähnlicher Weise verfahre man mit jeder andern Kombination aus je zwei Zahlen zur Summe 10. Sodann auch: Legt 10 Einheiten in 2 Reihen unter einander, wie viel kommen in jede Reihe? Eine Reihe von 10 Einheiten soll ein Zehner und je 5 Einheiten sollen ein Fünfer heißen, wie viel Fünfer gehen auf 1 Zehner? Nehmt von jeder der beiden Reihen 1 weg, wie viel bleiben in jeder? Also 2 4 und 2 gibt? — 10 Aepfel werden unter 3 Kinder vertheilt, das jüngste erhält 2, von den noch übrigen erhält jedes der beiden andern Kinder gleichviel, nämlich wie viel? — Legt mit den 10 Einheiten 3 gleiche Reihen an, wie viel Einheiten verbraucht ihr hierzu und wie viel habt ihr noch übrig? — Wie viel Dreier

stecken also in 1 Zehner? — Ein Knabe hat 10 Kr., er kauft sich Bleistifte, jeden zu 3 Kr., wie viel Bleistifte erhält er und wie viel Kreuzer behält er noch übrig? — 3 Kinder theilen sich in 10 Aepfel, wie viel ganze Aepfel erhält jedes und was für ein Stück? — Legt 10 Einheiten paarweise unter einander. Wie viel Paare erhaltet ihr? Wie viel mal ist also 2 in 10 enthalten? — Eine Knabe hatte im Anfange eines Spieles 10 Nüsse, er setzte jedesmal 2 ein und verlor dieselben, wie viel mal konnte er spielen? — Wie groß ist der fünfte Theil von 10? Wie groß ist der zweite Theil? u. s. w.

Da die Gewandtheit im Addiren hauptsächlich dadurch begründet wird, daß die Kinder jede Summe aus zwei einzifferigen Zahlen z. B. 7 + 8 in die andere 10 + 5 geschickt umformen lernen, so wird man für diesen Zweck die Anschauungsübungen, welche mit den Zahlen zwischen 10 und 20 vorgenommen werden müssen, vorzugsweise benutzen und man wird damit zu jenem Ziele auf kürzerem und lehrreicherem Wege gelangen, als durch das massenweise Aufgeben von Additionsexempeln, welche meist schon durch ihre Länge eine besondere Aufmerksamkeit auf diese Kombinationen nicht zulassen.

Man wird diese Uebungen unter anderm in folgender Weise anstellen: Legt 7 Einheiten auf die linke und 8 auf die rechte Seite, nehmt dann von dem Haufen links 2 herüber zu dem rechter Hand; wie viel sind nun links und wie viel rechts, wie viel gibt dies zusammen? — Ein Knabe hat 8 Nüsse in der linken und 7 in der rechten Tasche; um zu wissen, wie viel dies zusammen gebe, muß er wie viel aus der linken zu denen rechts nehmen, damit er rechts 10 hat? — Dann bleiben links? — Und zusammen hat er dann? — Zwei Knaben hüteten zwei kleine Heerden Schafe und zwar der eine 8 der andere 7, von der letztern liefen 2 zu der ersten; wie viel hatte nun der eine und der andere und wie viel hatten beide zusammen? — Später auch die Frage: der eine sagte zum andern: Gib mir so viele von deinen, damit ich doppelt soviel wie du habe; wie viel mußte dieser an jenen abgeben?

Mit ganz besonderem Fleiße müssen diejenigen Zahlen durchgearbeitet werden, welche aus mehrern Grundzahlen (Primfaktoren) zusammengesetzt sind, nicht bloß damit die Kinder sich diese Zusammensetzungen einprägen, sondern weil sie dabei auch allgemeine Gesetze der Zahlenverbindungen auf dem anschaulichsten Wege kennen lernen und sich aneignen. Als dahin gehöriges Beispiel möge die Zahl 24 dienen, welche man etwa in folgender Weise mit den Schülern behandeln wird: Ordnet 24 Einheiten in 2 gleiche unter einander stehende Reihen, wie viele kommen in jede Reihe? — 12 Einheiten oder 1 Dutzend ist also in 24 wie viel mal enthalten? — Was ist die Hälfte von 24? — 2 hier unter einander liegende Einheiten bilden ein Paar, wie viel Paare sind also in 24 enthalten? Wenn 24 Sgr. unter Arme vertheilt werden sollen, so daß jeder 2 Sgr. erhält, wie viele Arme können theilnehmen? Wie groß ist also der 12te Theil von 24? Nehmt von jeder der beiden Zwölferreihen 2 Einheiten weg, wie viele bleiben in jeder? Wie viel muß also zu 2. 10 hinzukommen, damit es 24 gibt? — 24 Kinder sollen sich auf 2 Schulbänke setzen, wie viel kommen auf jede? Wenn aber auf jeder Bank nur 10 Platz finden, wie viel müssen daneben stehen? — Theilt jede der 2 Zwölferreihen in 2 gleiche Theile, in wie viel Theile zerlegt ihr dann die 24 Einheiten? Wie groß ist ein Theil? Wie viel mal ist also 6 in 24 enthalten? Legt diese 4 Sechserreihen unter einander, eine bildet den wie vielten Theil von 24? Wie viel Einheiten liegen aber hier hinter einander in einer Reihe? Wie viel mal ist also 4 in 24 enthalten? — Ein Kind hat 24 Nüsse und ißt davon 4, den wie vielten Theil hat es gegessen? Wenn es dies täglich thut, wie viel Tage hat es daran genug? Wenn es aber täglich 6 Nüsse verzehrt, wie lange reicht es dann damit? — 24 Knaben stellen sich beim Soldatenspiel in 4 Reihen hinter einander auf, wie viel stehen in jeder Reihe? Jeder macht nun eine Viertelswendung, wie viel stehen dann in einer Reihe und wie viel Reihen folgen hinter einander? — Eine Zahl, welche 6 Einheiten 4 mal enthält, enthält also nothwendig auch 4 Einheiten 6 mal. — Wenn ihr von den 4 Reihen

zu je 6 eine Reihe wegnehmt und auf die 3 andern vertheilt, wie viel Einheiten kommen dann zu jeder der 3 übrigen Reihen hinzu und wie groß wird jede derselben? 8 ist also in 24 wie viel mal enthalten? Zugleich seht ihr hier auch wie viel Reihen Dreier (zu je 3)? — 3 ist also der wie vielte Theil von 24? — Ein Knabe hat 24 Pf., er will sich Papier kaufen, wovon jeder Bogen 3 Pf. kostet, wie viel wird er erhalten? Er besinnt sich aber wieder und kauft statt dessen Bleistifte, jeden zu 8 Pf., davon muß er nun umgekehrt gerade wie viel erhalten?

Derartige Anwendungen der von den Eigenschaften der Zahl 24 gewonnenen Anschauungen wird der Lehrer, welcher sich für die Sache interessirt, leicht noch mehr und von mannichfaltiger Art bilden können. Wenn ein Kind Schwierigkeit in der Beantwortung derselben aus dem Kopfe findet, muß es die der Aufgabe entsprechende Anordnung seiner Marken wiederholen.

Außer den Uebungen von der vorstehenden Art wird man auch fleißig Additions- und Subtraktionsaufgaben mit und ohne Hilfe der Zeichen ausführen lassen; insbesondere müssen dabei die Kinder Gelegenheit finden ihre Kenntniß der Zahlenpaare, welche zusammen 10 geben, zur Anwendung zu bringen, z. B.: Legt links 8 und rechts 16 Einheiten hin, wie viel müßt ihr von der Linken zur Rechten bringen, damit ihr rechts 2. 10 oder 20 Einheiten habt? Um aber linker Hand 10 zu haben, müßt ihr von der Rechten wie viel dazu nehmen? Wie viel bleiben noch rechts? Wie viel machen beide Theile zusammen? — A und B wollen sich in 24 Nüsse so theilen, daß A 4 mehr erhält als B, wie viel wird A und wie viel B empfangen?

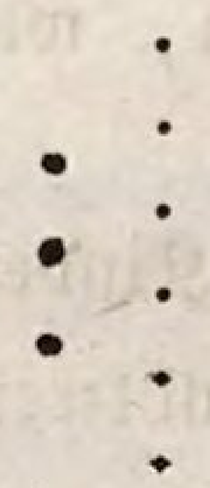
Auch einige Subtraktionen mögen hier angedeutet sein. — Ordnet die Zahl 24 in 2 Zehner und 1 Vierer unter einander. Nehmt 10 weg, wie viel bleiben? Wenn ihr aber nur 9 (oder 8) wegnehmen solltet und habt schon 10 weg genommen, wie macht ihr es jetzt, daß es richtig wird und wie groß ist nun der Rest? — Aus einer Schule mit 24 Schülern gingen nach den zwei ersten Lehrstunden die 10 kleinern weg, bald aber kehrt 1 (oder 2) zurück um noch eine Stunde zuzuhören. Wie viel blieben in der Schule

und wie viel waren weg gegangen? Wenn ihr von der Zahl 24, geordnet in 2 Zehner und 1 Vierer, 14 wegnehmt, wie viel bleibt? Solltet ihr aber nun nicht bloß 14, sondern 17 wegnehmen, was thut ihr noch und wie viel bleibt nun Rest? Wenn man also 17 von 24 abziehen soll, so kann man welche Mengen nach einander wegnehmen? Zieht aber nun 18 Einheiten so von 24 ab, daß ihr dieselben nur von den 2 Zehnern wegnehmt, wie viel bleibt von diesen und wie viel im Ganzen Rest? — Von 24 Knaben, welche Soldaten spielten, sollten 18 Gemeine sein, wie viel blieben zu Offizieren u. s. w. übrig?

In einer frequenten Klasse wird man nun kaum die Kinder mit mehr als 30 Zeichen für die einzelnen Einheiten handtiren lassen können. Es ist dieß jedoch auch nicht erforderlich; man muß vielmehr schon aus Rücksicht darauf, daß ein Hauptzweck dieser Uebungen ist, die Kinder auf dem Wege der Anschauung in das Zahlensystem einzuführen, nun eine andere Bezeichnungsweise wählen. Schon die vorhergehenden Uebungen gaben wiederholt Gelegenheit eine Reihe von 10 Einheiten als einen Zehner zu bezeichnen und man kann auch die angewandten Beispiele so wählen, daß diese Verbindungen zu je 10 als höhere Einheiten noch schärfer hervortreten, z. B. 36 Knaben spielen Soldaten, sie wollen Kompagnien bilden zu je 10, wie viel Kompagnien gibt es und wie viel bleiben zu Offizieren u. s. w. übrig? Auf den Zweck des Zahlensystems leitet man auch hin, indem man an Beispielen zeigt, welch einen Vortheil das Ordnen nnd Eintheilen einer größern Menge von Einheiten gewährt, um eine Uebersicht derselbeu zu gewinnen. Man legt z. B. eine unbestimmte Menge Einheiten, jedoch mindestens 30 vor die Schüler ungeordnet hin und läßt sie einen Versuch machen, dieselben in dieser Anordnung zu zählen. Die Kinder werden damit wohl nicht zu Stande kommen. — Dann läßt man sie ordnen in Reihen zu je 10 und — waren es etwa 36 — aussprechen: 3 Zehner und 6 oder 3. 10 und 6. — Oder: Ein Knabe wurde beauftragt die Schüler einer Klasse zu zählen. Als dieselben ohne Ordnung durch einander standen, gelang ihm dies nicht; nun setzten sich aber je 10 auf jede Bank und auf die letzte

Bank noch 6. Wie brachte er nun leicht die Anzahl der Schüler heraus?

Von nun an führt der Lehrer die Bezeichnung Einer (E) für jedes einzelne Ding und Zehner (Z) für jede Gruppe aus 10 ein. Diesem entsprechend müssen jetzt größere Marken für die Zehner und kleinere für die Einer gebraucht werden. In Ermangelung von besseren eignen sich dazu schon Bohnen und Waizenkörnern, indeß genügt auch die Darstellung durch Punktreihen in der



Weise wie anstehend die Zahl 36 bezeichnet ist, wo die größern Punkte in der Reihe links, welche man die zweite Stelle nennen muß, die Z bedeuten sollen. Der Lehrer zeichnet diese Punktreihen entweder selbst auf die Schultafel, wenn er die Kinder bei der Auflösung der Aufgaben durch seine Fragen leitet, oder er läßt auch Aufgaben in solchen Zeichen von den Kindern selbst auf ihren Schiefertafeln lösen. Von Zeit zu Zeit wird es jedoch nöthig auch von größern Zahlen bis 100 einschließlich jede einzelne Einheit durch eine Marke, sei es auch nur durch einen Punkt zu bezeichnen, nicht bloß damit die Kinder eine richtige Vorstellung von der Menge der mit dem Zahlworte bezeichneten Dinge erhalten, sondern weil man dadurch auch manche Eigenschaften der Zahlen anschaulicher hervortreten lassen kann.

Ein oder zwei Beispiele werden genügen, um deutlich zu machen, wie man sich dieser Punktreihen zu Anschauungsübungen im Rechnen bedienen kann. Man sei z. B. bis zur Zahl 52 gekommen. Die Schüler geben an, wie viel Z und E dieselbe enthält und daß sie sich daher wie anstehend bezeichnen läßt. Kleine Fragen, wie: Was



muß zu 30, zu 12 u. s. w. hinzukommen, damit es 52 gibt, oder: wie viel bleibt, wenn ich 20, 11 u. s. w. von 52 wegnehme, beantworten sich ohne weiteres aus dem bloßen Anblick des Zeichens. Weiter erklärt nun der Lehrer: Um 52 bequem in 2 gleiche Theile theilen zu können hindert uns der fünfte Z; wir verwandeln denselben daher noch in E und schreiben deshalb die Zahl 52 wie? Leset sie jetzt? Macht

daraus 2 gleiche Theile, wie viel E und Z kommen auf jeden Theil? (das Theilen kann dabei der Lehrer mit Querstrichen ausführen.) Wie viel mal ist also 26 in 52 enthalten? — Wenn sich zwei Kinder in 52 Nüsse theilen, wie viel erhält jedes? — Macht aus jedem der vorigen 2 Theile wieder 2 gleiche Theile, wie viel Theile entstehen dann und wie groß ist jeder? Was ist also der 4te Theil von 52? Wie viel mal ist 13 in 52 enthalten? Wie oftmal könnt ihr aber 12 von 52 wegnehmen und was bleibt übrig? — Die Schüler erkennen dies einmal daraus, daß von je 13 eins übrig bleibt oder sie ändern auch das Zeichen um in:

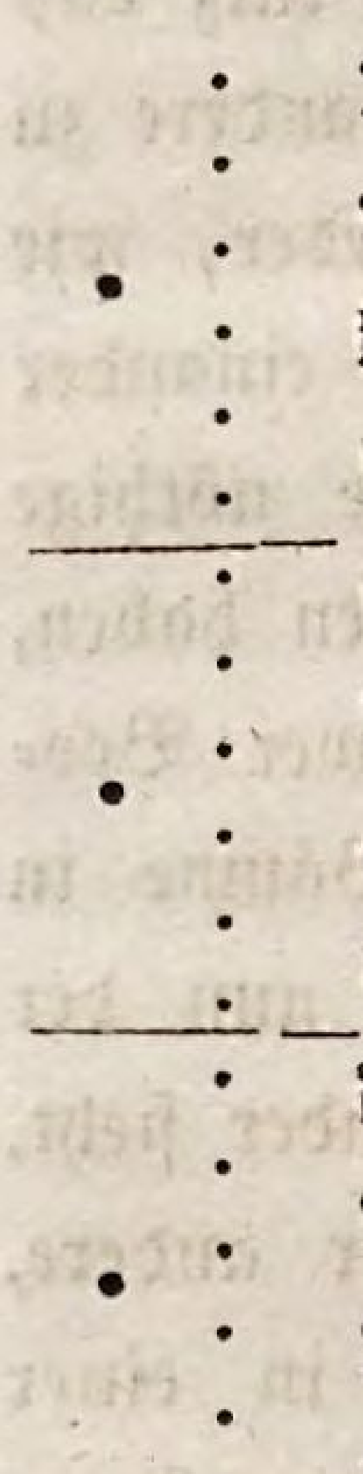
Um nun auch an der Zahl 52 das wichtige Gesetz nachzuweisen, daß eine Zahl die a Einheiten b mal enthält, auch deshalb nothwendig b Einheiten a mal enthalten muß, oder was darin begründet ist: daß, wenn a der bte Theil einer Zahl ist, auch deshalb nothwendig umgekehrt der ate Theil jener Zahl b sein muß, kurz daß das Messen und Theilen einer Zahl durch eine andere zu demselben Resultat führen muß, kann der Lehrer entweder, wie dies früher gezeigt ist, 4 Punktreihen zu je 13 unter einander setzen oder es genügt auch, wenn die Kinder schon die nöthige Uebung im Vorstellen derartiger Anordnungen sich erworben haben, anschauliche Beispiele folgender Art zu behandeln: Zwei Beobachter stehen vor einer Baumschule, in welcher die Bäume in Reihen gepflanzt sind, an verschiednen Seiten. Wenn nun der eine von vorne aus 4 Reihen von Bäumchen hinter einander sieht, jede Reihe aus 13, wie viel Bäumchen muß dann der andere, welcher rechts oder links steht, von seiner Seite aus in einer Reihe sehen, und wie viel solcher Reihen hinter einander? — Ferner, nachdem die Kinder wie oben an den anstehenden Zeichen für 52 erkannt haben, daß 13 in 52 4 mal enthalten ist, lasse man auch den 13ten Theil von 52 in folgender Weise suchen: Denkt euch die 52 Einheiten wären 52 Aepfel in einem

Korbe, davor ständen 13 Kinder um dieselben unter sich zu theilen. Alle greifen gleichzeitig in den Korb und jedes nimmt sich zunächst einen Apfel, wie viel nehmen sie mit einen solchen Griffe zusammen heraus? Wie viel mal können sie dies wiederholen? Wie viel Aepfel hat dann jedes erhalten? Wie groß ist also der 13te Theil von 52.

Die Zahl 52 ist hier nicht ganz zufällig gewählt, sondern um zu zeigen, daß sich auch mit einem ziemlich unbequemen Faktor, wie es die Zahl 13 ist, leichtfaßliche Aufgaben bilden lassen. Die vortheilhaftesten Zahlen in dieser Beziehung sind die aus mehreren kleinen Grundfaktoren zusammengesetzten, wie 48, 56, 72 u. s. w. Es mögen hier noch einige Andeutungen darüber Platz finden.



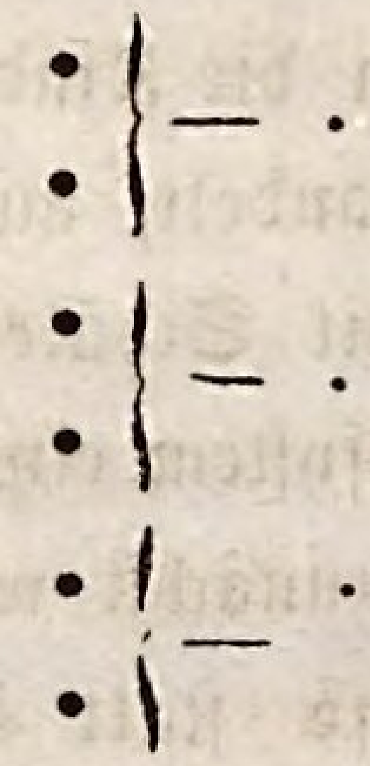
Die Theilbarkeit der Zahl 48 durch 12 und 24 erkennen die Schüler sogleich aus anstehender Bezeichnung. Was sie nun von 12 und 24 früher gelernt haben, wird sie zu folgenden Schlüssen befähigen: Jeder Zwölfer besteht aus zwei Sechsern, also enthält 48 8 Sechser, oder ist = 8. 6. Jeder Vierundzwanziger aus 3 Achtern, also ist 48 = 6. 8. Je



2 Achter geben einen Sechzehner, also ist 48 = 3. 16, was auch noch dadurch am Zeichen nachgewiesen werden kann, daß man einen Z in E auflöst. — Anwendungen hiervon sind: 48 Knaben haben sich in 4 Reihen aufgestellt, wie viel stehen in jeder? Wenn sie aber eine Viertelswendung machen, alsdann sieht man wie viel in einer Reihe und wie viel Reihen hinter einander? Wenn die Kinder sich dies nicht sogleich vorstellen können, muß der Lehrer die kleine Mühe nicht scheuen die entsprechenden Punktreihen an die Tafel zu zeichnen und dann mit der Tafel die Wendung machen, denn es gilt hier wieder der Einsicht in das Gesetz, daß wenn 12 der 4te Theil von 48 ist, umgekehrt der 12te Theil auch nothwendig 4 sein muß. Um hierbei zugleich die wichtige Regel zu üben, daß man mit den einzelnen Faktoren nach einander theilen kann, lasse man aus dem 4ten Theile den 8ten bilden durch Zerlegen jeder Zwölfer-

reihe in 2 Reihen Sechser und gebe zur Wiederholung Beispiele, wie: 8 Kinder theilen sich in 48 Aepfel, wie viel erhält jedes? Jedes gibt von seinem Antheil einem Kameraden wieder die Hälfte, wie viel Theile sind nun gemacht und wie groß ist ein Theil?

Man kann die Eigenschaften der faktorenreichern Zahlen oft benutzen, um daraus Folgerungen für die minder leicht zu behandelnden Zahlen zu ziehen; dies wird sich bei den größern Zahlen um so mehr empfehlen, als an unseren Anschauungsübungen sich immer mehr das Vorstellungsvermögen entwickeln wird, auf welches sich die Kinder beim Kopfrechnen — im richtigen Sinne des Wortes — stützen müssen. Dabei ist es nicht nothwendig die Reihenfolge der Zahlen streng einzuhalten; man kann z. B. aus den Eigenschaften der Zahl 60 manche Vortheile für die Untersuchung der Zahlen 57, 58, 59 ziehen. Weil 20 in 60 3 mal enthalten, 57 aber grade um 3 kleiner ist, so wird man den 3ten Theil von 57 erhalten, wenn man von jedem Zwanziger in 60 eine Einheit wegnimmt, was man, wie anstehend, in Zeichen darstellen kann, um die



Kinder ersehen zu lassen, daß 3 mal 19 57 gibt. — Weil 15 in 60 4 mal enthalten ist, wird man aus 57 nicht 4 Fünfzehner machen können, sondern am 4ten werden noch 3 Einheiten fehlen, also steckt 15 in 54 3 mal und 12 Rest. — Da 12 in 60 5 mal enthalten ist, so fehlen an 57 am 4ten Dutzend noch 3, also ist 12 in 57 nur 4 mal enthalten und blieben 9 Rest u. s. w.

Daß man mit Hilfe dieser Punktreihen oder Marken die gewöhnlichen Fälle der Addition und Subtraktion, z. B. das sog. Borgen sehr anschaulich erläutern kann, bedarf wohl kaum einer Erwähnung. Weitere Ausführungen gestattet mir hier der Raum nicht, sie werden aber auch unschwer von jedem Lehrer vervollständigt werden, dem es an Eifer für die Sache nicht fehlt, und dieser wird dem nicht fehlen, der die Ueberzeugung des Verfassers theilt, daß nur auf diesem Wege eine sichere Grundlage für einen rationellen Rechenunterricht gewonnen werden kann. Den Lohn für seine Mühe — und viel Mühe macht ihm dieser Anschauungskursus,

zumal wenn er ihn zum ersten Male ertheilt, — wird er bei weiterer Fortführung des Rechenunterrichts reichlich ernten, denn in diesen Kindern arbeitet ein innerer Sinn mit, der sie zu klaren Anschauungen aller der Zahlenverhältnisse drängt, aus denen sie Folgerungen ziehen sollen.

Zweiter Lehrgang.

Mündliches und schriftliches Rechnen mit höchstens dreizifferigen ganzen Zahlen.

Dieser zweite Kursus beginnt mit der Wiederholung der wichtigsten Uebungen des ersten, aber mit in Ziffern dargestellten Zahlen und nur ausnahmsweise wird man zur Versinnlichung schwieriger Verhältnisse zu der frühern Bezeichnung seine Zuflucht nehmen müssen.

Eine in Ziffern geschriebene Zahl, z. B. 47 werden die Kinder zunächst lesen 4 Z 7 E, und dann, die Z in E verwandelt, aussprechen: sieben und vierzig E. Hat man es aber mit Schülern zu thun, welche schon rechnen können, ohne vom Zahlensystem einen klaren Begriff zu haben, so muß man sie die Zahlen zunächst wie benannte Zahlen schreiben und aussprechen lassen, also statt 47 immer 4 Z 7 E oder noch besser 4 Z + 7 E. Auch wird man einem Schüler, der z. B. 47 nicht anders als siebenundvierzig auszusprechen gelernt hat, hinschreiben 4 Lth. 7 Quentch. und fragen: Sind dies siebenundvierzig Quentch.? Habe ich auch geschrieben siebenundvierzig Quentch.? Man muß auch solche Schüler sogleich zu der Einsicht bringen, daß man nur höchstens neun Einheiten derselben Art anschreiben kann, da man ja außer der Null nur neun Ziffern hat.

Bei den gewöhnlichen Additions- und Subtraktionsaufgaben wird man sich nun nicht lange aufzuhalten brauchen; die hierzu nöthigen Fertigkeiten haben sich die Kinder schon im ersten Kursus erworben. Nützlich sind noch die Additionsübungen folgender Art

welche die Aufmerksamkeit für die Eigenschaften der Zahlen wecken und die Schüler auf wichtige Regeln vorbereiten: $23 + 8 + 7 = (23 + 7) + 8$; $28 + 15 + 12 = (28 + 12) + 15$; $28 - 5 - 8 = (28 - 8) - 5$; $97 + 11 - 17 = (97 - 17) + 11$; $57 - 19 = (57 - 20) + 1$; $93 - 38 = (93 - 40) + 2$ u. s. w.

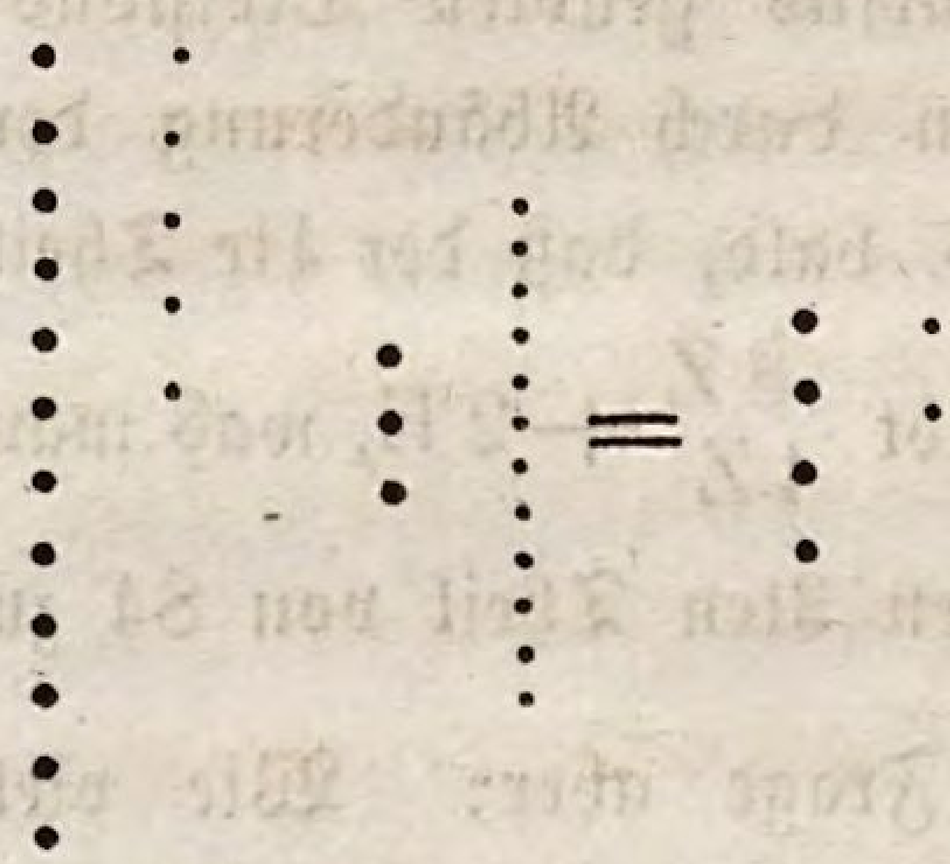
Ferner wird man zur Vorbereitung auf die **Multiplikation** und zur Einübung des Einmaleins (dessen Kenntniß die Schüler sich schon aus den Uebungen im ersten Jahr angeeignet haben müssen und das man am Schlusse desselben als Repetition zum Auswendiglernen aufgeben kann) auch Additionen mit gleichen Summanden ausführen lassen, wie z. B. $27 + 27 + 27 + 27$, wo sie aber keineswegs an den Fingern 7 E zu 7 E u. s. w. zählen, sondern die Summen aus ihrer Kenntniß des Einmaleins entnehmen sollen. Nachdem einige Beispiele der Art gerechnet sind, wird man den Kindern sagen: Hier ist also die Zahl 27 4 mal zu nehmen und Aufgaben dieser Art wollen wir künftig so bezeichnen: 4. 27 und aussprechen: 4 mal 27.*)

Die Wiederholung der im ersten Kursus geübten Divisionsaufgaben muß man den Kindern bisweilen durch Abänderung der Zeichen erleichtern. So erkennen sie z. B. bald, daß der 4te Theil von 92 23 ist, wenn man statt 92 schreibt $\genfrac{}{}{0pt}{}{8\,Z}{1\,Z} + 2\,E$, was man auch lesen läßt $8\,Z + 12\,E$; und um den 3ten Theil von 84 zu finden setzt man dafür $\genfrac{}{}{0pt}{}{6Z}{2Z}\,4\,E$. Die Frage aber: Wie viel mal sind 3 Einheiten in 84 enthalten, wird man hier direkt noch nicht lösen, sondern wie im ersten Kurse erläutern, indem man aus 84 bildet $60\,E + 24\,E$; oder man zeigt, was ohnedies wiederholt klar gemacht werden muß, daß wenn der 3te Theil von 84 28 ist, umgekehrt auch 3 der 28te Theil sein muß, an Beispielen etwa der Art: Ein Knabe hat 84 Pf. Er hat sich dieselben

*) Konsequenter Weise sollte man den Multiplikand zu erst, also links setzen, wie dies mit dem Dividend allgemein geschieht, und es bietet dies auch in den Erklärungen und Anwendungen manche Vortheile.

schon in 3 Theile getheilt, um je einen Theil wöchentlich für Obst zu verwenden; nun aber möchte er auch wissen, wie viel Tage er damit ausreichen würde, wenn er täglich 3 Pf. ausgäbe. Er nimmt deshalb von je einem der drei Theile 1 Pf., also jedes mal zusammen 3 Pf. weg, wie viel mal kann er dies? — Wie viel mal ist also 3 in 84 enthalten? — Ebenso viel mal als der 3te Theil von 84 beträgt. — Wie viel mal dagegen 21 in 84 enthalten ist, erkennt der Schüler unmittelbar, wenn man ihn nur fragt, wie oftmal er 2 Z und 1 E wegnehmen könne; ebenso wird ersehen aus $84 = {}^{7}_{1''}Z + 4\,E = 7.1\,Z + 7.2\,E$, daß 12 7mal darin enthalten ist u. s. w.

Indem wir nun zu den dreizifferigen Zahlen fortschreiten, setzen wir voraus, daß die Kinder schon aus dem ersten Lehrgange die Zahl 100 mit allen ihren Eigenschaften kennen gelernt haben und daß sie insbesondere auch einmal 100 gleichartige Dinge, und wären dies auch nur Punkte gewesen, neben einander geordnet und ungeordnet gesehen und gezählt haben. — Man sei nun im Weiterzählen gekommen etwa bis zu 125. Man



schreibe dies zunächst mit 12 Z- und 5 Epunkten und frage: Wie läßt sich für dieses Zeichen wohl ein einfacheres bilden? — Vergleichet, damit ihr dies leichter findet, die beiden hier neben einander stehenden Zeichen für dieselbe Zahl 42. — Wir werden also für zehn Zehner eine neue Einheit einführen. Wie viel E sind in dieser neuen Einheit enthalten? Wie werden wir deshalb dieselbe nennen? — Das einfachere Zeichen für einhundertfünfundzwanzig wird daher so aussehen  . Wie werdet ihr dies mit Ziffern schreiben?

Das Rechnen mit den zusammengesetzten Zahlzeichen des Zehnersystems ist dem mit benannten Zahlen ganz analog, ja es würde damit völlig übereinstimmen, wenn überall das Decimalsystem konsequent durchgeführt wäre. Man sollte nun denken, daß man das letzere an jenes anknüpfe und dadurch erläutere. Dem

Verfasser ist es in der Regel umgekehrt ergangen; die Schüler, welche er zu unterrichten hatte, konnten meist schon rechnen, ohne vom Zahlensystem ein Verständniß zu haben. Dies nachzuholen gelang ihm am besten durch Vergleichung der dekadischen Zahlen mit den benannten von ungleicher Benennung. Sie mußten z. B. die Summe 3 Thlr. 7 Sgr. 5 Pf. auf vier verschiedene Weisen aussprechen, zunächst so, wie sie geschrieben ist, sodann 97 Sgr. 5 Pf., ferner 3 Thlr. 89 Pf. und endlich 1169 Pf. Dem entsprechend mußten sie nun auch lesen: 375 zunächst 3 H 7 Z 5 E, dann 3 H fünfundsiebenzig E, siebenunddreißig Z 5 E, endlich dreihunderfünfundsiebzig E. Da das Decimalsystem bei dem Längenmaß schon allgemeiner ist, so eignet sich auch dies vorzugsweise zu diesen Uebungen, insbesondere bei mehr als dreizifferigen Zahlen. Diesen Uebungen im Umwandeln der Einheiten des Zahlensystems, welche unerläßlich sind, wenn Verständniß und darauf sich gründende Gewandtheit im Rechnen erzielt werden soll, gibt man mehr Interesse, wenn man Anwendungen etwa folgender Art davon macht:

Ein Knabe besitzt so viel Geld in seiner Sparbüchse, daß es zusammen 573 Pf. ausmacht. Er will sich dafür bleierne Soldaten kaufen, das Stück zu 1 Pf. Es stehen da Kästchen mit 100 Stück und Schachteln mit 10 Stück. Wie viel Kästchen kann er kaufen? Wie viel Schachteln, wenn er bloß solche haben will? Wie viel einzelne Stück? — Ein Landwirth hat 795 Schafe. Je 100 sollen eine Heerde unter einem Hirten bilden, wie viel Heerden gibt es? Je 10 soll ein Knabe überwachen, wie viel Knaben müssen als Wächter angestellt werden?

Rücksichtlich der gewöhnlichen Uebungen im Addiren und Subtrahiren möge hier nur noch die Bemerkung Platz finden, daß man das gedankenlose Ab- und Zuzählen der einzelnen Einheiten etwa noch mit Hilfe der Finger dabei nicht dulden darf, sondern die Kinder müssen die Summen und Differenzen bilden, wie dies schon früher gezeigt worden ist, indem sie z. B. aus 26 + 8 machen 20 + (6 + 8), wenn sie die letzte Summe schon kennen, oder 24 + (2 + 8); aus 14 — 6 bilden sie 14 — 4 — 2. Kindern indeß, welche unsern Weg gegangen sind, müssen diese Umformungen,

worauf die Gewandtheit im Addiren und Subtrahiren beruht, schon geläufig sein.

Die Multiplikation behandeln wir auf dieser Stufe immer nur als wiederholte Addition einer und derselben Zahl, bei welcher man die Summen aus dem Einmaleins entnehmen kann; darin besteht ja auch allein der Unterschied zwischen der Ausführung der Multiplikations- und der gewöhnlichen Additionsaufgaben. Wir erlassen den Kindern hier noch das Auffassen abstrakter Definitionen und belästigen sie auch noch nicht mit den leider meist einer fremden Sprache entnommenen und deshalb schwieriger zu erlernenden Kunstausdrücken. Damit sie aber die Multiplikation nur als eine mit Hilfe des Einmaleins auszuführende Addition ansehen können, darf der Multiplikator nur einzifferig sein, oder man darf doch nur solche 2zifferige wählen, deren Vielfache die Kinder auswendig wissen oder leicht zu finden im Stande sind. Zunächst wird man nun hier erst wieder die Aufgabe in Form einer Summe hinschreiben z. B. 275 + 275 + 275 und unmittelbar wie eine Addition ausführen lassen, dann aber das kürzere Zeichen 3. 275 setzen und damit die Rechnung noch einmal wiederholen, wobei man nöthigenfalls darauf aufmerksam macht, daß die Summen 5 + 5 + 5 u. 7 Z + 7 Z + 7 Z u. s. w. schon aus dem Einmaleins bekannt sind. — Beispiele mit 12. 65 werden hier gerechnet 12. 6 Z + 12. 5; ebenso 20. 45 = 20. 4 Z + 20. 5.

Für die Divisionsübungen eignen sich auf dieser Stufe vorzugsweise die Theilungsaufgaben mit einzifferigen Divisoren, die des Messens nur in besondern Fällen. Beiderlei Aufgaben müssen hier noch jede auf ihre besondere Art behandelt werden, wenn Klarheit die Grundbedingung des Rechenunterrichts sein soll. Die Kinder haben zwar schon in vielen einzelnen Fällen die Gültigkeit des allgemeinen Gesetzes, welches beide Divisionsarten zusammenfaßt, kennen gelernt, die volle Einsicht in dasselbe aber können sie erst später gewinnen; außerdem bildet auch die Eigenthümlichkeit einer jeden ein besonderes Moment für die Ausbildung des Sinnes für Zahlenverhältnisse. Es würde sich sehr empfehlen, anfangs auch in der Bezeichnung der beiden Divisionen einen

Unterschied zu machen, etwa das Theilen so: 4/128 = 32, das Messen aber durch 128: 4 = 32 anzudeuten.

Divisionen der ersten Art, welche jetzt sehr leicht ausgeführt werden können, sind: 124:4, was man zuerst noch so schreiben kann: 12 Z + 4 E:4. Daran reiht man sogleich die Aufgabe 134:4. Aufgaben, wie 192:6, kann man auch noch daneben schreiben lassen: (18 Z + 12 E):6. Aus der Auflösung z. B. von 699:3 finden die Schüler etwa auch 702:3. Daß sie sich hierbei nur so ausdrücken dürfen: der 3te Theil von 6 H sind 2 H, der 3te Theil von 9 Z sind 3 Z u. s. w. und nicht 3 geht in 6 u. s. w., was nur bei Aufgaben der zweiten Art Sinn hat, sollte sich von selbst verstehen, wenn der Verstand immer beim Rechnen gebraucht würde. — Hat der erste Kursus den rechten Erfolg gehabt, so lösen sie auch Aufgaben dieser Art leicht: 546:13, wobei man fragt: was ist der 13te Theil von 52 Z und 26 E? Leicht zu behandelnde Fälle der zweiten Art sind: 320:40, zumal wenn der Lehrer auch schreibt 32 Z:4 Z und etwa zuvor noch fragt: wie viel mal könnt ihr denn 4 Sgr. von 32 Sgr. wegnehmen? Bei Aufgaben, wie 129:43 wird man ebenfalls zunächst fragen: wie viel mal könnt ihr 43 von 129 wegnehmen? Wird die Auflösung nicht unmittelbar gefunden, so kann man sie zunächst durch die Ausführung der Subtraktion 129 — 43 — 43 — 43 suchen lassen.

Statt die Kinder auf dieser Altersstufe mit großen Multiplikations- und Divisionsexempeln zu beschäftigen, wovon sie noch kein Verständniß sich aneignen können und die sie darum auch nur in mechanischer und deßhalb geisttödtender Weise ausrechnen lernen, lassen wir sie jetzt vielmehr kleine Aufgaben aller Art in benannten Zahlen ausführen, so weit ihr Verständniß der Multiplikation und Division zu den nöthigen Reduktionen und Resolvirungen ausreicht. Die vier Grundrechnungsarten in ganzen benannten Zahlen sind so leicht faßlich, daß man sich ihrer bei der denselben eignen größern Anschaulichkeit bedienen kann, um Schüler, welche die Rechnungen mit unbenannten Zahlen in gedankenloser Weise gelernt haben, noch zur versäumten Einsicht in dieselben hinzuführen. Fragt man einen solchen Schüler,

wenn er z. B. 396:6 ausführen soll: wovon nimmst du zu erst den 6ten Theil und wovon nachher? so wird er antworten: Ich theile erst 39 und dann 36 und erhalte erst 6 und dann wieder 6. Fragt man ihn aber, was denn zwischen diesen beiden 6 für ein Unterschied sei, so versteht er gar nicht, was man damit will. Gibt man ihm nun auf: 3 Thlr. 9 Sgr. 6 Pf., oder was noch analoger ist, 3 Lth. 9 Quent. 6 Cent:6, so sieht er sogleich ein, daß er zuerst Quent. und dann Cent zu theilen hat, daß also auch die erste Ziffer 6 Quent, die andere Cent bedeuten muß.

Wir werden nun auch hierin nicht bloß und nicht zu viele Beispiele der gewöhnlichsten Art rechnen lassen, da diese eben von keinem Werthe für die Verstandesbildung sind, sondern wir geben denselben bald eine anregendere Form. Dies wird zunächst erreicht, indem wir die Schüler mit einigen Regeln über das Rechnen mit Summen und Differenzen bekannt machen, welche indeß hier noch nicht als Regeln ausgesprochen und auswendig gelernt zu werden brauchen. Daß man die Addition 316 + 98 besser ausführt, = 316 + (100 — 2) = (316 + 100) — 2, sowie die Subtraktion 316 — 97 = 316 — (100 — 3) = (316 — 100) + 3, wird sehr leicht eingesehen, besonders wenn der Lehrer die Aufgabe zunächst so stellt: Ein Knabe sollte sich aus einem Korbe mit 316 Nüssen 97 herausnehmen, er hat aber 100 genommen, wie viel muß er wieder zurückgeben? Wie viel bleiben im Korbe übrig? — Dies wendet man nun auch auf Beispiele folgender Art an:

3 Pf. 7 Lth — 1 Pf. 28 Lth. = 3 Pf. 7 Lth. — (2 Pf. — 2 Lth); 3 Thlr. 11 Sgr. + 8 Thlr. 28 Sgr. = 3 Thlr. 11 Sgr. + (9 Thlr. — 2 Sgr.) Selbst 3 Thlr. 11 Sgr. — 2 Thlr. 18 Sgr. rechnet sich bequemer: 3 Thr. 11 Sgr. — (3 Thlr. — 12 Sgr.) Diese Beispiele, wenn sie, wie hier, in kleinern Zahlen gegeben sind, können als Kopfrechnen behandelt werden.

Ferner wenn 5. 97 in der Form 5 (100 — 3) berechnet werden soll, wird man erläutern: So oft ihr 100 nehmt, nehmt ihr 3 zu viel, oder durch ein Schema, wenn z. B. 3. 295 auszurechnen ist:

300 — 5 = 295	
300 — 5 = 295	
300 — 5 = 295	
3.300—3.5=3.295	

Auch durch Beispiele folgender Art werden die Kinder leicht auf dies Verfahren hinzuleiten sein! In einer Stadt lagen 6 Kompagnien, jede zu 200 Mann, von jeder Kompagnie werden 5 beurlaubt. Wie könnt ihr nun am bequemsten berechnen, wie viel Soldaten in der Garnison zurückbleiben?

Hierher gehörige Beispiele in benannten Zahlen sind: 7. (9 Ctr. 92 Pf.) = 7. (10 Ct. — 8 Pf.) Auch 8. (3 Thlr. 9 Sgr. 11 Pf.) = 8. (3 Thlr. 10 Sgr. — 1 Pf.) — Den umgekehrten Fall, wie mit einer Differenz multiplicirt wird. z. B. 19. 12 = (20 — 1). 12, 9. 37 = (10 — 1). 37, erklären wir einfach dadurch, daß wir statt dessen sagen: 19 Dutzend sind 20 Dutzend weniger 1 Dutzend, 9 Siebenunddreißiger sind 10 Siebenunddreißiger weniger 1 Siebenunddreißiger u. s. w.

Endlich üben wir auch noch das Theilen von Differenzen. Um die Kinder leicht auf diese Regel zu bringen, dienen Aufgaben wie 294: 3 = (300 — 6): 3 in dieser Weise gestellt: 3 Knaben sollten sich in 294 Nüsse theilen; sie haben aber 300 unter sich getheilt, wie viel müssen sie zusammen, wie viel also jeder einzelne herausgeben? — Auch Fragen der Art: um wie viel ist der 4te Theil von 400 größer als der 4te Theil von 392? (wo die Schüler dann schließen: weil in 400 8 Einheiten mehr sind als in 392, so sind in jedem der 4 Theile nur 2 Einheiten mehr); ferner: 7 Kaufleute wollen sich in 6 Ctr. 86 Pf. theilen (wo sie finden, daß jeder 1 Ctr. bekommen würde, wenn es 14 Pf. mehr wären, daß also jedem 2 Pf. am Ctr. fehlen werden). Man gibt dann gemischte Beispiele, wobei sie sich erst jede zu theilende Zahl darauf anzusehen haben, ob sich dieselbe mit Vortheil in eine Differenz umwandeln läßt.

Eine zweckmäßige Beschäftigung für die Schüler dieses Lehrgangs werden auch leichte Regeldetriaufgaben folgender Art bilden: Wenn man für 3 Kr. 7 Aepfel kaufen kann, wie viel erhält man für 36 Kr.? Es wird so geschlossen: 36 Kr. sind 12. 3 Kr., also erhält man auch 12. 7 Aepfel. Ebenso umgekehrt:

es sollen 98 Ellen gekauft werden von einem Zeuge, wovon 7 Ellen 3 Thlr. kosten. — Man will 14. 7 Ellen kaufen, also zahlt man auch 14. 3 Thlr. — In Beispielen folgender Art dagegen: 72 Bleistifte kauft man für 24 Sgr. wie viel wird man für 15 Sgr. erhalten? — haben die Schüler erst zu finden, wie viel Bleistifte man für 1 Sgr. bekommt. Beispiele der Art: Für 12 fl. kauft man 35 Pf. 18 Lth., wie viel für 19 fl., welche nach der eben vorausgegangnen Regel gerechnet werden müssen, indem man statt 35 Pf. 18 Lth. setzt 36 Pf. — 12 Lth. und statt 19 fl. (20 — 1) fl., dienen ebenfalls dazu, das Aufmerken der Kinder auf die Eigenschaften der Zahlen, womit sie rechnen, zu wecken. Auch aus der sog. Gesellschafts- oder Vertheilungsrechnung lassen sich leicht Aufgaben bilden, welche für unsere kleinen Schüler verständlich und von Interesse sind, z. B.: Eine Mutter hat für ihre 4 Kinder zu Christtag 360 Nüsse gekauft; diese will sie in so viele gleiche Theile theilen, daß sie dem jüngsten 1 Theil, dem nächst ältern 3, dem folgenden 5 und dem ältesten 6 Theile geben kann. Wie viel gleiche Theile müssen gemacht werden und wie viel erhält ein jedes Kind?

Endlich gehören auch noch zu diesem Kursus die Uebungen im Zerlegen der Zahlen von 1 — 100 in ihre einfachen Faktoren, wozu die Kinder schon im ersten Lehrgange die Grundlage gelegt haben und welche ihnen beim weitern Fortschreiten von großem Nutzen sein werden. Als Vorbereitung schicken wir noch einige Belehrung über das Rechnen mit mehr als 2 Faktoren voraus.

Zunächst wiederholen wir, daß 2 Faktoren mit einander vertauscht werden dürfen, an einem Beispiele etwa folgender Art: Ein Geselle hatte bei einem Meister 13 Wochen gearbeitet und es war ihm wöchentlich 7 Thlr. Lohn versprochen worden. Dieser zahlt ihn in der Weise aus, daß er sieben Reihen von je 13 Thlr. vor denselben hinzählt. Der Geselle sieht es aber nicht sogleich ein, daß dies richtig ist; wie zeigt ihm nun wohl der Meister, daß ihm damit auch 7 Thlr. 13 mal ausgezahlt sind? — Eine Zahl, welche also 13 Einheiten 7 mal enthält, muß eben deshalb auch 7 Einheiten 13 mal enthalten, oder 7. 13 ist einerlei mit

13. 7. — Gilt dies auch von 11. 12 = 12. 11? Wie wollt ihr mich, wenn ich daran zweifele, überzeugen daß dies jedesmal so sein muß, ohne daß ihr ausrechnet, was z. B. 11. 12 gibt? Antw. Wir setzen 11 Reihen von Punkten, jedesmal 12 Punkte in einer Reihe, hin u. s. w.

Auf das Vertauschen von 3 Faktoren führen Beispiele folgender Art. 6 Kr. nennt man auch einen Sechser. A hat täglich 4 Sechser verdient und 5 Tage lang gearbeitet; B verdient täglich 5 Sechser, wie lange muß er arbeiten, um ebenso viel zu verdienen? Ihr schließt also, daß 4 Sechser 5 mal genommen ebenso viel Kreuzer geben, als 5 Sechser 4 mal, oder daß 5. 4. 6 = 4. 5. 6. Wie könnt ihr mir an nebenstehender Summe zeigen,

$$\begin{array}{l} 7+7+7+7 \\ 7+7+7+7 \\ 7+7+7+7 \end{array}$$

daß 4 Siebner 3 mal genommen = 3 Siebner 4 mal sind? Was gibt mehr: 2. 13. 5 oder 13. 2. 5? Was läßt sich aber am leichtesten berechnen? Antw. Letzteres, weil es gibt 13. 10 = 130. Rechnet danach 42. 5 aus? Antw. 21. 2. 5 = 21. 10? Berechnet 4. 7. 25 auf die bequemste Weise? Antw. 7. 4. 25 = 7. 100. Rechnet ebenso 32. 25? Antw. 8. 4. 25 = 8. 100? Aber 24. 26 = 24. (25 + 1) = 600 + 24; und 27. 25 = (28 — 1). 25 = 7. 4. 25 — 25 = 700 — 25 = 675 u. s. w.

Die Uebungen im Auflösen der Zahlen 1 bis 100 in ihre Primfactoren sollen nicht das Auswendiglernen dieser Faktoren zum Ziele haben, sondern sie sollen nur die Fertigkeit entwickeln dieselben erforderlichen Falls immer wieder leicht finden zu können. Zunächst leistet hierbei das Einmaleins die besten Dienste. Ein Schüler, welcher, nach den Faktoren von z. B. 48 gefragt wird, muß gelernt haben sogleich aus dem Einmaleins dafür zu setzen 8. 6 und dies wieder aufzulösen in 2. 2. 2. 2. 3. Dafür setzen wir aber vorerst noch nicht die kürzere Form 2^4. 3. — Zahlen, welche nicht im Einmaleins stehen und auch nicht sogleich den Faktor 2 oder 3 verrathen, wie z. B. 57, lehrt man mit benachbarten vergleichen, von welchen sie sich um einen Faktor dieser unterscheiden, also 57 = 54 + 3 oder noch besser = 60 — 3. Den Faktor 5 z. B. in 95 erkennen sie sogleich durch Zerlegen

in 90 + 5 oder 100 — 5. Es bleibt etwa bloß 91 übrig, dessen Faktoren sie dem Gedächtnisse einzuprägen haben. Ein kleiner Vortheil, die Aufmerksamkeit der Schüler rege zu erhalten, besteht darin, daß man nicht die Zahlen selbst, sondern nur ihre Faktoren nennen läßt, so daß, wenn A eben gesagt hat 5. 7, B sogleich fortfährt: 2. 2. 3. 3.

Mit dem Zerlegen der Zahlen verbinde man auch Uebungen folgender Art: Weil 72 = 2. 2. 2. 3. 3., und 24 = 2. 2. 2. 3., so muß 24 in 72 3 mal enthalten sein. 2. 2. 2. 3. 3 ist auch = 2. 2. (2. 3. 3) = 4. 18, also ist 18 in 72 4 mal enthalten u. s. w.

Dritter Lehrgang.

Erweiterung und Fortsetzung des Rechnens mit ganzen Zahlen.

Im allgemeinen wird sich der Lehrstoff unserer beiden ersten Kurse in zwei Jahren bei durchschnittlich einer halben Lehrstunde täglich ganz bequem absolviren lassen; aber wenn dies auch nicht möglich wäre, so läßt es sich durch die Rücksicht auf den Zeitaufwand doch nicht rechtfertigen diesen die geistige Entwicklung stetig fördernden Weg zu verlassen, um auf dem des geistlosen Mechanismus rascher zum Ziele zu kommen; denn dieses raschere Fortschreiten ist doch nur eine Täuschung in doppelter Beziehung, da in Wahrheit unsere Schüler von der Arithmetik schon etwas verstehn, während jene abgerichteten kaum eine Ahnung haben werden, daß es dabei etwas zu verstehen gibt; dann aber, weil sie, und darauf ist das Hauptgewicht zu legen, die Befähigung zum Verständniß der nachfolgenden Lehren entwickelt haben, während die mechanische Dressur dieselbe hemmt und verkümmert. Im allgemeinen setzen wir daher in unserm dritten Lehrgang Knaben zwischen dem achten und zehnten Lebensjahre voraus und nehmen für denselben abermals ungefähr ein Jahr in Anspruch. Wir beginnen mit der Erweiterung des Zahlensystems, ohne diese jedoch bis zur Darstellung des ganzen Gesetzes durchzuführen, da wir von Schülern des vorausgesetzten Alters eine vollständige Auffassung

desselben kaum erwarten können, da wir es ferner in seiner Vollständigkeit nicht bedürfen, um die Multiplikation und Division ganzer Zahlen zum Abschluß zu bringen und endlich weil wir eine Repetition desselben für wünschenswerth halten, wozu sich bei der Lehre von den Decimalbrüchen ohne dies Veranlassung findet.

Wir führen die Schüler den nächsten Schritt weiter in Numeriren etwa in in folgender Art: Schreibt die größte Zahl an, die ihr noch schreiben könnt und sprecht sie als E aus. Kommt nun zu diesen neunhundertneunundneunzig E noch 1 E hinzu, so erhält man Tausend E. Diese Menge E müssen wir also zunächst so bezeichnen: 999 + 1, führen wir aber diese Addition aus, so erhalten wir zehn H. Für zehn Einheiten haben wir aber keine Ziffer, was haben wir in diesem Falle bisher gethan? — Wir werden also auch jetzt wieder aus den zehn H eine neue Einheit machen. Wie werden wir dieselbe nennen?*) — Was habe ich nun hier (1000) geschrieben? — Antw. 1 T. — Wie könnt ihr aber dieses Zeichen noch mehr lesen? Antw. zehn H, hundert Z, tausend E. — Man schreibt ihnen nun Zahlen, wie 3400, 5070, 2059, 3150, 2796 hin, läßt jede zunächst so lesen, wie sie geschrieben ist, und dann die höhern Einheiten in niedere verwandeln, also z. B. 5070 zuerst: 5 T 7 Z, dann fünfzig H sieben Z, fünfhundertundsieben Z, endlich fünftausendsiebzig E. Zur Abwechslung fragen wir auch: Wie viel mal ist 1000, 100, 10, 1 in 3758 enthalten? — So schreiten wir fort etwa bis zu der 7ten Stelle, indem wir dabei jedesmal die Verwandlung der höheren Einheiten in niedere üben. Diese Uebungen gewinnen mehr Anschaulichkeit und ein erhöhtes Interesse durch Anwendungen folgender Art: Die Stadt Berlin, welche 607903 Einwohner hat, würde geben: wie viel Städte wie München mit etwa 100000 E., Städte wie Fulda mit etwa 10000 E. — Wie viel Soldaten stellt die Stadt Berlin, wenn von je 1000 E. einer Soldat wird; wie

*) Um den Schülern das Zweckmäßige des Zusammenfassens einer Menge von niedern Einheiten zu einer höhern klar zu machen kann man auch gelegentlich die Frage an sie richten: Was nöthigt die Menschen bei Münzen, Maßen und Gewichten zur Einführung höherer Einheiten?

viel Häuser hat dieselbe, wenn durchschnittlich 10 E. in einem Hause wohnen? — Oder eine Armee von 358970 Mann, wie viel Corps zu 10000, Bataillone zu 1000, Compagnien zu 100 M., wie viel Unteroffiziere, wenn auf je 10 M. ein Unteroffizier kommt?

Erst wenn die Schüler in dieser Weise sich mit dem Zahlensysteme vertraut gemacht haben, sind sie genügend vorbereitet, den Mechanismus der Multiplikation und Division vollständig zu begreifen. Wir führen sie nun auf die Bedeutung der Multiplikation etwa in dieser Weise. Wie könnt ihr euch kurz schriftlich anmerken, daß die Zahl 376 9 mal zu sich selbst addirt werden soll? Antw. Wir schreiben hin 9. 376. — Müßt ihr nun beim Ausrechnen diese Zahl 9 mal unter einander setzen und die 6 E, dann die 7 Z u. s. w. 9 mal zusammenzählen? Antw. Nein, wir wissen schon aus dem Einmaleins, was 9. 6 E, 9. 7 Z u. s. w. gibt. — Nun merkt euch: dies wiederholte Addiren einer und derselben Zahl mit Hilfe des Einmaleins nennen wir künftig das Multipliciren. Die Zahl, welche wiederholt addirt werden soll, heißt der Multiplikand, die, welche angibt, wie viel mal der Multiplikand zu sich selbst addirt werden soll, wird der Multiplikator genannt. Die Zahl, welche durch das Multipliciren gefunden wird, heißt das Produkt. Weil 9. 13 = 117 ist, so kann 117 angesehen werden als eine Summe aus wie viel Summanden, die alle gleich 13 sind? — Aber wenn eine Zahl 13 Einheiten 9 mal enthält, wie viel mal müssen dann umgekehrt 9 Einheiten darin enthalten sein? — Es wird gut sein, dies nochmals wie in den beiden ersten Kursen zu erläutern. — Gilt dies ebenso von dem Produkte 13. 17 = 351? — Ich würde dies in Punktreihen an der Tafel nicht wohl darstellen können, sagt mir lieber, wie ihr euch diese Reihen denken müßt? — Es ist dieses also ein allgemeines Gesetz, welches für alle Zahlen gilt. — Es ist also beim Multipliciren zweier Zahlen einerlei, welche man als Multiplikand oder als Multiplikator ansieht; daher nennt man dieselben auch unterschiedslos die Faktoren des Produkts.

Anmerkung. Man sollte an höhern Lehranstalten diese Gelegenheit nicht versäumen, um den Schülern den Zweck der unbestimmten Zahlzeichen schon hier klar zu machen, indem man den allgemeinen Beweis des obigen Gesetzes etwa in folgender Weise führt: Wenn wir von Zahlen überhaupt reden wollen, ohne dabei bestimmte Zahlen (7, 11 . . .) im Sinne zu haben, so machen wir es ähnlich, wie wenn wir etwa von ganz beliebigen Menschen reden wollen. Wie wir dann den einen etwa A den andern B nennen, so sprechen wir auch von einer Zahl a, einer Zahl b, womit wir dann 2 verschiedene, aber sonst ganz beliebig große Zahlen bezeichnen wollen. Denken wir uns nun a Punkte in einer wagrechten Reihe und solcher Reihen b unter einander, so sehen wir, daß die Zahl, welche a Einheiten b mal enthält, deshalb auch nothwendig b Einheiten a mal enthalten muß. —

1) a + a + a . . . + a = ab
2) a + a + a . . . + a = ab
3) a + a + a . . . + a = ab
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
c) a a a a = ab

ac + ac + ac . . . ac.

Ferner wollen wir die Zahl, welche a Einheiten b mal enthält, die Zahl ab nennen und eine dritte Zahl mit c bezeichnen; wir ersehen dann aus anstehender Summe, daß die Zahl, welche ab c mal enthält, auch nothwendig ac b mal enthalten muß.

Wir leiten nun unsere Schüler zur nähern Einsicht in den Mechanismus der Multiplikation durch Fragen folgender Art: Was geben 7 E 10 mal, 100 mal, 1000 mal . . .? Antw. 7 Z, 7 H, 7 T . . . Was geben aber 7 Z, 10 mal, 100 mal, 1000 mal . . .? Antw. 7 H, 7 T, 7 Zt. (Zt. = Zehntausender) . . . — Diese Fragen werden sie sehr leicht zu beantworten im Stande sein, da sie aus ihrer gründlichern Kenntniß des Zahlensystems wissen, daß z. B. 100 H = 1 Zt, also auch, daß 100. 7 H = 7 Zt. — Wir multipliciren dann die E, Z, H, . . .

mit 20, 200, 2000 . . . und die Schüler werden sogleich finden, daß weil z. B. 100. 7 H = 7 Zt auch 2. 100. 7 H = 2. 7 Zt ist u. s. w. Wir wiederholen diese Resultate nun, ehe wir dieselben als Gesetze aussprechen, noch in folgender Weise: Welche Einheiten entstehen an der 1, 2, 3ten Stelle (von rechts) bei der Multiplikation von 3. 3587? — Also an jeder Stelle Einheiten grade dieser Stelle. Berechnen wir aber 30. 3587, was geben dann die einzelnen Stellen des Multiplikands der Reihe nach? — Wir erhalten also aus jeder Stelle des Multiplikands 3 mal mehr Einheiten der nächsthöhern Stelle oder das Produkt der 3 Z mit allen Stellen rückt eine Stelle vor. Multipliciren wir 300. 3587, so erhalten wir von links nach rechts der Reihe nach welche Einheiten? Antw. Die E werden H, die Z werden T u. s. w. — Das Produkt der einzelnen Stellen rückt also hier um wie viel Stellen vor? — Diese Uebung setzt man noch weiter fort, wiederholt sie an einer zweiten Zahl und kann dann das hieraus einleuchtende Gesetz so aussprechen lassen: Das Produkt des Multiplikands mit irgend einer Ziffer des Multiplikators rückt so viel Stellen vor, als diese Stellen hinter sich hat. Auf diesen Gesetze beruht der Mechanismus der Multiplikation, welchen Kinder, die auf unserem Wege angeleitet worden sind, völlig zu durchschauen im Stande sein werden; diese werden auch z. B. nicht, wenn sie 3576 × 3040 aus zu führen haben, mit den Nullen multipliciren wollen. Uebrigens geben wir ihnen zunächst Beispiele von der Form: 7536 × 111 und 7536 × 222 u. s. w., weil sie bei solchen ihre Aufmerksamkeit ungetheilter auf die Anwendung des obigen Gesetzes richten werden.

Zur Division fortschreitend halten wir es immer noch durch die Rücksicht auf Klarheit und Anschaulichkeit geboten, die beiden mehr erwähnten Fälle zu unterscheiden. Die Kinder sollen beim Erlernen einer Rechenoperation ihre Gedanken auf den Sinn und Zweck derselben richten; statt dessen würde man sie aber zur Gedankenlosigkeit nöthigen, wenn man in dem Falle, wo sich etwa 8 Personen in 696 Thlr. theilen sollen, sie anleitete zu suchen, wie viel mal die 8 (Personen) in die 696 Thlr hineingehen und so um-

gekehrt zu theilen, wenn die Größe des Theils schon gegeben ist, aber die Anzahl der Theile gesucht werden soll. Würde man hier schärfer unterscheiden, so würde man auch die Reduktionsaufgaben zweckmäßiger behandeln und nicht z. B. sagen: ich suche den 30ten Theil von 750 Sgr., wenn ich Silbergr. in Thaler verwandeln will, sondern vielmehr: ich sehe zu, wie oft 30 Sgr. in 750 Sgr enthalten sind.

Was nun zunächst den Fall des eigentlichen Theilens betrifft, so bedarf der hier keiner weiteren Vorbereitung mehr, als daß man die Schüler durch ein paar Fragen der Art: Was ist der 12te Theil von 36 E 36 Z 36 H. u. s. w. daran erinnert, daß der Theil hier immer Einheiten von derselben Art enthält, wie das Getheilte. Die erste Anwendung hiervon macht man auf Beispiele dieser Art: 3624 : 12 (= 3 H 2 E); 51034: 17 (= 3 T 2 E); 46690 : 23 (= 2 T 3 Z), wo die Schüler, welche die Faktoren der Zahlen von |1—100| kennen, das Resultat sogleich mündlich angeben werden. Sollte es hierbei noch nothwendig erscheinen zu erklären, daß man z. B. bei der Aufgabe 98439 : 24 nicht die 9 T als T theilen kann, so wird man dies durch anschauliche Beispiele folgender Art erläutern: 24 Personen sollen sich in 9843 Thlr. theilen, sie finden 9 Beutel je mit 1000 Thlr. 8 Rollen je mit 100 u. s. w.; wird jeder einen Beutel mit 1000 erhalten können? Wird aber nicht jeder, wenn sie das Geld in den 9 Beuteln unter sich vertheilen, mehrere 100 Thlr. davon erhalten können? Sie werden daher die 9 Beutel in Rollen zu je 100 auflösen und die vorhandenen 8 Rollen dazulegen u. s. w.

Die Divisionsaufgaben der zweiten Art werden leicht durch folgende Vorübungen verständlich gemacht: Wie vielmal muß man 12 E nehmen, um 12 Z, 12 H, 12 T . . . zu erhalten? — Wie viel mal, um 24 Z, 24 H, 24 T . . . zu erhalten? Wie vielmal sind demnach 12 E in 12 Z, 24 Z u. s. w. enthalten? Danach werden sogleich wieder Aufgaben dieser Art mündlich gelöst werden können? 1836 : 18; 52390: 13; 480072 : 24 u. s. w. Man wird hier nur fragen: Wie vielmal sind 24 E in 48 E, wie vielmal also in 48 Zt enthalten? Das weitere Verfahren bedarf wohl keiner Andeutung mehr.

Nachdem die Schüler jede der beiden Arten von Aufgaben, welche man unter der Benennung Division vereinigt, für sich klar aufzufassen gelernt haben, ist es erst an der Zeit, diese unter einem gemeinsamen Gesichtspunkte als eine und dieselbe Operation zusammenzufassen. Die Vorbereitungen zu diesem Schritte, der keineswegs zu den leichtern gehört, sind schon in den beiden ersten Lehrgängen getroffen. Wir führen nun die Schüler dahin durch Fragen etwa folgender Art:

Wenn 7 Arbeiter zusammen 203 fl. verdient haben und man zahlt einen derselben als seinen Antheil 29 fl. aus, wie kann er sich davon überzeugen, daß er nicht zu kurz gekommen ist, oder wie kann er die Probe machen, ob dieses der 7te Theil ist? Antw. Er wird zusehen, ob 29 fl. 7 mal genommen 203 fl. geben. — In einem andern Falle hat eine uns unbekannte Anzahl Arbeiter 221 fl. verdient und es trug einem jeden derselben 13 fl; wie finden wir, wie viel Arbeiter es waren, und wie machen wir die Probe darüber? — Wenn aber nun ein einzelner Arbeiter statt 13 fl. umgekehrt 17 fl. erhalten hätte, wie viel Arbeiter müßten es dann gewesen sein? Wie macht ihr nun die Probe? Bei der ersten Probe hattet ihr euch davon überzeugt, das in der Zahl 221 13 Einheiten 17 mal enthalten sind, bei der zweiten umgekehrt, daß in derselben Zahl 17 Einheiten 13 mal liegen; war diese zweite Probe eigentlich noch nothwendig? Antw. Nein, denn eine Zahl, welche 13 Einheiten 17 mal enthält, muß auch nothwendig 17 Einheiten 13 mal enthalten. — In welcher der beiden Aufgaben wurde ein Theil des Dividends gesucht? — In welcher war dagegen die Größe des Theils schon bekannt und wir suchten, der wie vielte Theil es sei oder die Anzahl solcher Theile? — Weil es sich in beiden Fällen um einen Theil des Dividends handelt, so nennt man beiderlei Aufgaben Theilungs- oder Divisionsaufgaben. — Ihr habt in beiden Fällen die Probe durch Multiplikation gemacht; welchen Faktor bildet aber die gesuchte Zahl bei dieser Multiplikation im ersten und dann im andern Falle? — In beiden Fällen stellt also der Dividend das Produkt aus dem Divisor und Quotient vor. — In welcher der beiden Aufgaben: Suchet den 8ten Theil von 576, und suchet, wie viel mal ist 8 in 516 enthalten?

ist der Divisor entweder als Multiplikator oder als Multiplikand zu 576 als Produkt anzusehen? — Warum wird nun immer derselbe Quotient (bei benannten Zahlen ohne Rücksicht auf die Benennung) gefunden, ob man den Divisor als Multiplikand oder als Multiplikator ansieht? — Antw. Weil es einerlei ist, welchen von den beiden Faktoren eines Produkts ich als Multiplikand und welchen ich als Multiplikator betrachte, oder weil, wenn eine von zwei Zahlen Multiplikand, die andere Multiplikator eines gegebenen Produkts ist, dann auch umgekehrt, wenn die erstere als Multiplikator betrachtet wird, die andere der Multiplikand sein muß. — Wie könnt ihr nun obige beiden Aufgaben zusammen fassen, wenn ihr bedenkt, daß man den Multiplikand sowohl als auch den Multiplikator ohne Unterschied einen Faktor des gegebenen Produkts nennen kann? — Wir können also unter Division diejenige Rechnungsart verstehn, welche lehrt ein Produkt in zwei Faktoren aufzulösen, von denen der eine gegeben ist, oder welche lehrt aus einem gegebenen Produkt und dem einen Faktor den unbekannten andern zu suchen.

Das gewöhnliche Multipliciren und Dividiren muß nun freilich aus Rücksicht auf die praktischen Zwecke bis zur mechanischen Fertigkeit geübt werden; dazu wird aber mit Schülern, wie wir sie vorbereitet annehmen, ein verhältnißmäßig geringer Zeitaufwand erforderlich sein. Zwischendurch machen wir dieselben noch mit einigen Regeln bekannt, welche mehr geeignet sind ihre geistige Thätigkeit beim Rechnen in Anspruch zu nehmen. Aus diesem Grunde und wegen ihres praktischen Nutzens sind diese Regeln auch an Volksschulen zu üben; an den untern Klassen höherer Lehranstalten müssen dieselben aber auch in Worte gefaßt und dem Gedächtniß eingeprägt werden, da sie insbesondere auch die Auffassung der allgemeinen Arithmetik oder Buchstabenrechnung zu erleichtern vermögen. Viele derselben sind schon im zweiten Lehrgange erläutert und geübt worden.

1) Soll der Unterschied zweier Zahlen addirt werden, so kann statt dessen der Minuend addirt und der Subtrahend abgezogen werden z. B. $723 + 587 = 723 + (600 - 13) =$

(723 + 600) — 13 oder = (723 — 13) + 600. Diese Regel läßt sich besonders häufig bei benannten Zahlen mit Vortheil anwenden, z. B. 133 Thlr. 7 Sgr. 5 Hlr. + 57 Thlr. 26 Sgr. 8 Hlr. = 133 Thlr. 7 Sgr. 5 Hlr. + (58 Thlr. — 3 Sgr. 4 Hlr.) = (133 + 58) Thlr. + (7 — 3) Sgr. + (5 — 4) Hlr. Die Erläuterung dieser und der folgenden Regel ist schon oben Seite 34 gegeben.

2) Soll der Unterschied zweier Zahlen abgezogen werden, so kann statt dessen der Minuend abgezogen und der Subtrahend addirt werden. — Dies kann auch auf Beispiele folgender Art angewendet werden: 415 Ctr. 7. Pf. 29 Lth. — 211 Ctr. 87 Pf. 15 Lth. = (315 — 212) Ctr. + (7 + 13) Pf. + (29 — 15) Lth.

Die Regel, wie eine Summe und wie mit einer Summe multiplicirt wird, liegt schon dem gewöhnlichen Multipliciren zu Grunde und kann daran leicht erläutert werden. Wichtiger ist für uns die Umkehrung dieser Regel, nämlich:

3) Sollen mehrere Zahlen mit derselben Zahl multiplicirt und diese Produkte addirt werden, so multiplicirt man statt dessen die Summe der Zahlen mit diesem gemeinschaftlichen Faktor; oder kürzer: Produkte mit einem gleichen Faktor werden addirt, indem man die Summe der andern Faktoren mit dem gemeinschaftlichen multiplicirt. — Wir führen die Schüler leicht auf diese Regel durch Fragen folgender Art: Wie viel Dutzend sind 7 Dutz. und 3 Dutz.? Also 7. 12 + 3. 12 ist = 10. 12. — Was ist demnach 7. 13 + 3. 13? u. s. w. Zur Uebung bilde man auch Beispiele in benannten Zahlen, wie z. B.: Jemand gab während 4 Wochen durchschnittlich täglich aus: in der 1ten Woche 2 fl. 4 kr., in der 2ten 1 fl. 54 kr., in der 3ten 2 fl. 10 kr., in der 4ten 1 fl. 52 kr., wie viel in den 4 Wochen. Antw. 7. (2 fl. 4 kr. + 1 fl. 54. . . .)

4) Soll der Unterschied zweier Zahlen multiplicirt werden, so kann man statt dessen den Minuend und Subtrahend multipliciren und diese Produkte von einander abziehen. Vergl. Seite 34 u. 35.

Soll mit dem Unterschiede zweier Zahlen multiplicirt werden, so kann man statt dessen mit dem Minuend und Subtrahend multipliciren und die Produkte von einander abziehen; z. B. 28 × 17 Thlr. 28 Sgr. = (30 — 2) × (17 Thlr. 28 Sgr.) = (510 Thlr. + 28 Thlr.) — 2. 17 Thlr. 28 Sgr. = 538 Thlr. — (36 Thlr. — 4 Sgr.)

5) Sollen mehrere Zahlen mit derselben Zahl multiplicirt und diese Produkte von einander abgezogen werden, so kann man statt dessen erst diese Zahlen von einander abziehen und ihren Unterschied mit dem gemeinschaftlichen Faktor multipliciren z. B. 17. 23. — 7. 23 = 10. 23, zur Erläuterung ausgesprochen: 17 Dreiundzwanziger weniger 7 Dreiundzw. gibt 10 Dreiundzw. Auch an Beispielen in benannten Zahlen, wofür die Regel ohne dies wichtig ist, läßt sie sich leicht erklären, wie z. B. Ein Kaufmann hat 12 Fässer Tabak, in jedem 2 Ctr. 15 Pf., gekauft und hat davon 12 Tage hinter einander durchschnittlich täglich 76 Pf. 29 Lth. verkauft; wie groß ist der Rest? — Man braucht hier nur anzunehmen, es werde aus jedem der einzelnen Fässer nach einander 76 Pf. 29 Lth. herausgenommen, um klar zu machen, daß der Rest sein muß = 12. (2 Ctr. 15 Pf. — 76 Pf. 29 Lth.) = 12. (2 Ctr. 15 Pf. — 77 Pf. + 1 Lth.)

6) Statt den Unterschied zweier Zahlen zu theilen, kann man auch diese zwei Zahlen theilen und die Quotienten von einander abziehen. Vergl. Seite 35.

7) Statt mit einer Zahl zu multipliciren, kann man auch mit ihren Faktoren nach einander multipliciren. — Zur Erläuterung: 35 Dutzend, wie vielmal 7 Dutzend? Also 35. 12 = 5. 7. 12. — Auch an Beispielen folgender Art zu üben: 35. 24 Sgr. = 7. (5 24) Sgr. = 7. (4 30) Sgr. = 7. 4 Thlr.; 28. 9 Zoll = 7. 4. 9 Zoll = 7. (3. 12) Zoll = 21 Fuß u. s. w.

8) Statt mit einer Zahl zu dividiren, kann man mit ihren Faktoren nach einander theilen. — Man kann diese Regel zunächst durch Theilen einer Linie oder eines Kreises erläutern, etwa: Ein Kuchen soll in 12 gleiche Theile getheilt werden, in wie viel Theile zerschneidet man ihn am besten zuerst? — dann führt man

den Beweis auch in Zahlen etwa in dieser Weise: 3 Familien, von denen jede 6 Kinder hat, theilen unter sich eine Erbschaft von 9000 Thlr., wie viel kommt auf jedes Kind? Jedes Kind erhält den 18ten Theil des Ganzen, aber auch den 6ten Theil von dem, was auf jede Familie fällt, d. i. den 6ten Theil vom 3ten Theil. Oder durch folgende Zusammenstellung:

75

25 + 25 + 25

5 5 5 5 5   5 5 5 5 5   5 5 5 5 5

woraus man ersieht, daß der 15te Theil auch der 5te Theil vom 3ten ist. — Hieran kann man auch die Regel knüpfen: Ein Quotient bleibt ungeändert, wenn man Dividend und Divisor mit der nämlichen Zahl multiplicirt oder dividirt, denn 75 : 25 = 15 : 5.

9) Soll aber ein Produkt getheilt werden, so kann man auch nur einen der Faktoren theilen und diesen Quotient mit dem andern multipliciren. z. B. (15. 24) : 5 = 3. 24. — Was ist der 5te Theil von 15 Vierundzwanzigern? — In der Form: statt erst zu multipliciren und dann zu dividiren kann man auch erst dividiren und dann multipliciren, wird sich diese Regel den Schülern oft bequemer zur Anwendung darbieten, besonders wenn man die Reihenfolge auch umkehrt, also: statt erst zu dividiren und dann zu multipliciren u. s. w. Dies kann man auch unabhängig vom Vorigen etwa so erläutern. Um uns zu überzeugen, ob 5. (128 : 8). nothwendig dasselbe geben muß, wie (5. 128): 8, wollen wir annehmen: 8 Knaben sollten sich in 5 Teller voll Nüsse theilen, jeder Teller mit 128 Nüssen. Führen sie das Theilen aus nach dem Ansatz 5. (128 : 8), so theilen sie einen Teller nach dem andern unter sich; wollen sie aber die Division nach der Formel (5. 128): 8 ausführen, so müssen sie die 5 Teller in ein Körbchen zusammen schütten und dieses Körbchen mit 5. 128 Nüssen in 8 gleiche Theile theilen. In dem einen Falle muß aber jeder Knabe so viel erhalten, als im andern.

Um die Schüler in den Stand zu setzen diese letzten Regeln, welche sich als besonders nützlich bei der Regeldetri und bei den

Brüchen erweisen werden, zur Anwendung zu bringen, sind hier zunächst noch einmal die Faktoren der Zahlen von 1 — 100 zu wiederholen, wobei man nun die Bezeichnung 2^4 für 2. 2. 2. 2., 3^2 für 3. 3 u. s. w. einführt. Dann müssen wir sie mit den Kennzeichen der Faktoren bekannt machen und damit sie davon einen freiern Gebrauch beim Dividiren machen können, auch mit der Bedeutung des Bruchs und seinem Zusammenhange mit der Division.

Wir leiten die Schüler zunächst auf den Begriff des Bruchs durch Fragen und Erklärungen folgender Art: Was versteht man unter einer Halben, einer Viertelelle? Warum heißt der Heller auch ein Viertelkreuzer, der Pfennig ein Zwölftelsilbergroschen? — Wenn ein Apfel u. s. w. in 7 gleiche Theile getheilt ist, wie nennt man dann kurz den 7ten Theil? — Den 4ten, 5ten Theil, d. i. 1 Viertel 1 Fünftel von einem Ganzen bezeichnen wir kürzer mit $^1/_4$, $^1/_5$. Wie werden wir nun 3 Viertelellen, wie 2 Fünftel von irgend einem Ganzen schreiben? Da z. B. $^3/_4$ Ellen nicht die ganze Elle, sondern nur einen Theil bedeutet, so heißt $^3/_4$ ein Bruchtheil oder kurz ein Bruch. Von der Anzahl der gleichen Theile (4 oder 5 u. s. w.) hängt es ab, ob wir einen Theil ein Viertel oder Fünftel u. s. w. nennen, daher wird die Zahl unter dem Strich der Nenner genannt. Da die Zahl 3 Viertel 3 Einheiten hat, von denen jede 1 Viertel ist, so haben wir uns auch unter den Zeichen $^3/_4$ eine Zahl mit 3 Einheiten zu denken, von denen jede $^1/_4$ heißt. Die Zahl über dem Strich gibt also die Anzahl der Einheiten an, welche der Bruch enthält; sie heißt daher der Zähler. — Von den gleich bedeutenden Zahlen 7 Zoll und $^7/_{12}$ Fuß hat jede wie viel Einheiten? Warum nennt man nun die erste eine ganze Zahl, die zweite aber einen Bruch? — Wenn du von dieser Linie $^7/_{12}$ abschneiden oder von diesem Apfel dir $^7/_{12}$ nehmen sollst, wie willst du das machen? — Was wirst du erhalten, wenn du von einem Thaler $^3/_5$ zu empfangen hast? — Antw. Ich erhalte auch hier den 5ten Theil von 1 Thaler 3 mal. Das sind wie viel Sgr.? — Also ist $^3/_5$ von 30 Sgr. = 18 Sgr. u. s. w. — Was verstehst du nun wohl unter $^3/_5$ von der Zahl 15 u. s. w. Hieran schließt

sich dann die Erläuterung der unächten Brüche, der gemischten Zahlen und die Umwandlung der einen in die andern. — Da $^7/_7$ ein Ganzes gibt, wie viel Ganze sind da in $^{30}/_7$ enthalten?

Daß der Bruch und der Quotient zwar dem Begriff nach verschieden, dem Werthe nach aber gleich sind, muß sorgfältig erläutert werden, etwa so: Wenn sich 4 Knaben in 3 Aepfel theilen sollen, so wird ein jeder nur einen Bruchtheil von einem Apfel erhalten können; wir wollen sehen, was das für ein Bruchtheil ist. Denken wir uns, die Knaben theilen einen Apfel nach dem andern, so wird jeder von jedem Apfel $^1/_4$ erhalten, zusammen also $^3/_4$. Könnte nun nicht ein Knabe seinen Antheil an den 3 Aepfeln auch von einen einzigen derselben sich abschneiden? — Also $^3/_4$ von 1 Apfel ist ebenso viel, wie der 4te Theil von 3 Aepfeln. — 5 Personen A, B . . . nehmen zusammen bei M 4 Ctr. Kaffee. A will sich seinen Theil abholen und erwartet, daß M die 4 Ctr., welche sich in 4 gleichen Säcken befinden, unmittelbar in 5 gleiche Theile theile; M will ihm statt dessen von einem Sacke 80 Pf. d. i. $^4/_5$ von 100 Pf. oder $^4/_5$ von 1 Ctr. abwiegen. Wenn nun A zweifelt, ob er so seinen richtigen Antheil auch erhält, wie kann ihm dies nachgewiesen werden? — Vier Personen wollen 3 Ellen Zeug unter sich theilen, wie können sie dies mit einer Elle ausführen? — Umgekehrt: Jemand will von einem Stück Tuch, welches 3 Ellen lang ist, $^3/_4$ von 1 Elle abschneiden, kann aber seine Elle nicht finden, wie wird er sich helfen? Antw. Faltet er das Tuch 4fach zusammen und schneidet eine Lage ab, so nimmt er statt dessen den 4ten Theil von 3 Ellen.

Diese hiermit gewonnenen Vorstellungen von den Brüchen, (welche das Wesentlichste enthalten, worauf man sich — etwa noch in Verbindung mit einigen leichten Additionen und Subtraktionen auf manchen Volksschulen beschränken sollte, um das Rechnen mit ganzen Zahlen gründlicher lehren zu können) üben wir nun zunächst an Beispielen der Reduktion und Resolvirung ein, welche wir in dieser Weise behandeln: Da 1 Sgr. $^1/_{30}$ Thlr ist, was sind demnach 17 Sgr.? — Was sind 18 Sgr. in Thalern? — Antw. $^{18}/_{30}$. Aber 6 Sgr. ist auch $^1/_5$ Thlr., also sind 18 Sgr.

auch wie viel Fünftelthaler? — $^3/_4$ von 1 fl. ist $^3/_4$ von 60 Kr.; aber $^1/_4$ von 60 Kr. ist wie viel? Also $^3/_4$ von 60 Kr.? Also ist $^3/_4$ fl. = 45 Kr.

Die Anwendung der Brüche zur vollständigen Durchführung des eigentlichen Theilens folgt unmittelbar aus dem Zusammenhange zwischen Bruch und Quotient, denn ist z. B. 656 : 7 = 93 mit dem Rest 5 gefunden, so wird man nur fragen, wie groß ist nun auch noch der 7te Theil dieses Restes? Der andere Fall der Division aber muß sorgfältiger behandelt werden, wenn die Kinder eine klare Vorstellung davon erhalten sollen. Sie haben oben schon gelernt und an der Zurückführung höherer Einheiten auf niedere geübt, daß z. B. $^3/_4$ von einer Zahl nehmen heißt: den 4ten Theil derselben 3 mal nehmen. Dies rufen wir hier denselben ins Gedächtniß zurück und ergänzen es durch die Bemerkung, daß man statt $^3/_4$ von irgend etwas nehmen auch sagen kann, etwas $^3/_4$ mal nehmen daß also z. B. 12 $^3/_4$mal nehmen oder $^3/_4$. 12 heißt: den 4ten Theil von 12 3mal nehmen. (Man erkläre auch den Unterschied zwischen: $^3/_4$ von 5 Ellen nehmen und $^3/_4$ Ellen von 5 Ellen nehmen.) — Was ist demnach $^2/_3$. 9? Welcher Bruchtheil von 9 gibt also 6 Ganze? — Was für ein Bruchtheil von 7 Ganzen sind 5 Ganze? — Antw. 1 Ganzes ist $^1/_7$ von 7 Ganzen, also sind 5 Ganze $^5/_7$ von 7 Ganzen oder es ist $^5/_7$. 7 = 5. — Welch einen Bruchtheil bildet 8 von 12? Antw. 4 ist $^1/_3$ von 12, also ist 8 = $^2/_3$. — Wie vielmal sind 12 Thlr. in 257 Thlr. enthalten? — Antw. 21 mal mit dem Rest 5. Aber 12 Thlr. 21 mal genommen gibt erst 252; wie vielmal, d. i. welchen Bruchtheil müssen wir nun noch von den 12 Thlr. nehmen, um auch den Rest von 5 Thlr. zu erhalten? Wie heißt also der vollständige Quotient der Division 257 : 12.

Zur geschickten Anwendung vieler der vorstehenden Regeln gehört, daß die Schüler der Faktoren der Zahlen — so weit dies hier möglich — zu erkennen vermögen. Eine bloße mechanische Einübung dieser Kennzeichen ist aber nicht zu rechtfertigen, da die Schüler wohl im Stande sind dieselben in nachfolgender Weise zu entwickeln.

Die Faktoren 2 und 5 als leichtere Fälle, welche in ähnlicher Weise, wie der folgende, zu behandeln sind, hier übergehend schreiten wir zur Auffindung der Regel für den Faktor 4 etwa in folgender Weise: Was ist der 4te Theil von 100? — Was ist also der 4te Theil von 1700? Antw. 17. 25 (4. 4. 25 + 25 = 425) — Welche Zahlen könnt ihr auf diese Weise durch 4 theilen? — Antw. Die, welche Vielfache von 100 sind, welche also mit 2 Nullen endigen. — Wenn ihr nun untersuchen wollt, ob sich auch die Zahl 1976 durch 4 ohne Rest theilen läßt, welchen Theil der Zahl habt ihr nur deswegen in Betracht zu ziehen? Antw. Die Zahl, welche die 2 letzten Ziffern geben. — Also ist jede Zahl durch 4 ohne Rest theilbar, wenn die 2 letzten Ziffern eine durch 4 ohne Rest theilbare Zahl geben. — Aehnlich verfährt man rücksichtlich der Zahl 8, obgleich diese Regel auch entbehrt werden kann.

Von den verwandten Regeln der Theilbarkeit durch 3 und 9 ist die letztere voraus zu schicken, weil dabei die Begründung sich etwas einfacher macht. — Man fragt zunächst: Was ist der 9te Theil von 1 Z, 1 H, 1 T . . . ? Antw. $1\frac{1}{9}$, $11\frac{1}{9}$, $111\frac{1}{9}$ . . . Was ist demnach der 9te Theil von 7 Z, 5 H, 8 T . . . . . ? Was erhaltet ihr, wenn ihr die Stellen der Zahl 738 der Reihe nach durch 9 theilt? — Antw. $77\frac{7}{9} + 3\frac{3}{9} + \frac{8}{9}$? Was ist demnach der 9te Theil der Zahl 738? Antwort.

$$80 + \frac{7 + 3 + 8}{9} = 80 + \frac{7 + 3 + 8}{9} \text{ d. i. } = 82.$$

— Was erhaltet ihr in dieser Weise als 9ten Theil von 657? — Warum beträgt hier die Summe der Brüche wieder $\frac{18}{9}$ oder 2 Ganze? — Was bei der Zahl 7983? — Wie muß demnach die Summe der Ziffern sein, wenn die Brüche, welche durch die stellenweise Theilung entstehen, auch zusammen eine ganze Zahl geben sollen? — Hieraus folgt also die Regel: Eine Zahl ist durch 9 ohne Rest theilbar, wenn die Summe ihrer Ziffern, welche man auch Quersumme nennt, durch 9 ohne Rest theilbar ist. — In ganz ähnlicher Weise folgert man die Regel für den Faktor 3, indem man als 3ten Theil der Zahl 576 zunächst hinschreibt:

$$5.\,33 + \frac{5}{3} + 7.\,3 + \frac{7}{3} + \frac{6}{3} + 186 + \frac{5 + 7 + 6}{3}$$

Will man diesen Beweis führen, ohne einige Kenntniß von den Brüchen vorauszusetzen, so wird man die Sache etwa so anschaulich darstellen können: Denkt euch, 9 Personen sollten sich in eine Erbschaft von 7587 Thlr. theilen. Sie finden 7 Beutel jeden mit 1000 Thlr.; sie theilen einen nach dem andern und behalten von jedem 1 Thlr. Rest, den sie zurück legen; dann theilen sie 5 Rollen jede mit 100 Thlr. eine nach der andern und legen von jeder wieder 1 Thlr. zurück u. s. w. Die einzelnen Reste schreiben wir in dieser Weise unter die Zahl 7 5 8 7

$$7 + 5 + 8 + 7$$

um die Regel sogleich in die Augen springen zu lassen.

Die Regel für die Theilbarkeit durch 11 finden die Schüler ebenfalls ohne bedeutende Schwierigkeit, wenn man in folgender Weise zuwege geht: Jeder E durch 11 getheilt gibt $^1/_{11}$, jeder $Z = 11 - 1$ gibt $1 - {}^1/_{11}$, der $H = 99 + 1$ gibt $9 + {}^1/_{11}$ der $T = 990 + 10 = 990 + 11 - 1$ gibt $91 - {}^1/_{11}$ ... Auf diese Weise zeigt man, daß jede Einheit einer geraden Stelle durch 11 getheilt eine ganze Zahl weniger $^1/_{11}$, jede einer ungeraden aber eine ganze Zahl $+ {}^1/_{11}$ gibt. — Theilt man nun z. B. die einzelnen Stellen von 7689 durch 11, so erhält man $7. 91 - {}^7/_{11} + 6. 9 + {}^6/_{11} + 8 - {}^8/_{11} + {}^9/_{11}$. Man hat also $^{15}/_{11}$ zu den Ganzen hinzu zu fügen und auch wieder $^{15}/_{11}$ abzuziehen. Dies hebt sich auf, also ist der 11 Theil von 7689 eine ganze Zahl. — Theilt man ebenso 7482 durch 11, so findet man, daß $^{15}/_{11}$ abzuziehen, aber nur $^6/_{11}$ zu addiren sind, es bleibt also noch $^{11}/_{11}$, d. i. 1 Ganzes abzuziehen, in 7482 geht also ebenfalls 11 auf. — Zu diesen Beispielen fügt man auch einige, bei welchen diese Theilbarkeit nicht stattfindet und die Schüler werden dann im Stande sein die Regel auszusprechen: Eine Zahl ist durch 11 ohne Rest theilbar, wenn entweder die Summen der geraden und ungeraden Stellen einander gleich sind, oder wenn sich beide Summen um eine durch 11 theilbare Zahl unterscheiden. Wir werden nun den Schülern Gelegenheit geben diese und die vorhergehenden Regeln sogleich an passenden Beispielen einzuüben, wozu wir zunächst einige Divisionsaufgaben wählen.

Die Division 38000:360 gibt nach S. 47 Regel 8) zunächst 3800:36, dann nach derselben Regel 950: 9 = $105^5/_9$. Will man hier den Rest wissen, wie z. B. wenn man finden will, wie viel Thlr. und Sgr. die Summe 750 Sgr. beträgt, wo man ebenfalls theilt 740:30 = 74:3 = $24^2/_3$, so muß man schließen, daß der Rest 2 der letzten Division herrührt von den Z der gegebenen Zahl also = 20 E ist. — Die Regel 6) läßt sich ebenfalls bei unbenannten Zahlen mit Vortheil in Anwendung bringen z. B. 2478:126. Man erkennt 2 und 3 als gemeinschaftliche Faktoren, kann also zunächst durch 6 theilen und erhält 413:21, da aber 413:21 = (420 — 7):21, so erhält man (420 — 7): 7 = 60 — 1 und dann 30 — $^1/_3$. — In der Aufgabe 116 Thlr. 12 Sgr.: 27 Thlr. 9 Sgr. wird man setzen 117 Thlr. — 18 Sgr.: 27 Thlr. 9 Sgr. und dafür 13 Thlr. — 2 Sgr.: 3 Thlr. 1 Sgr.

Die wichtigsten Uebungen aber, womit wir diesen Kursus beschließen, bilden einfache Regeldetriaufgaben, Gesellschaftsrechnungen u. s. w., bei welchen noch nicht weiter auf die Bruchrechnung eingegangen zu werden braucht, als es unsern Schülern bis jetzt möglich ist. Wir wollen hier nur einige Beispiele betrachten, wobei obige Regeln mit Vortheil benutzt werden können:

216 Arbeiter werfen einen Graben von 576 Fuß Länge in einem Tage auf, wie lang werden 105 Arb. einen solchen Graben in derselben Zeit machen können? Man wird die Schüler zunächst nach den gemeinschaftlichen Faktoren der Zahlen 216 und 576 fragen und sie folgern lassen: wenn es 8 mal weniger Arbeiter wären, so würden sie auch 8 mal weniger Arbeit fertig machen, also 27 Arb. würden einen Graben von 72 Fuß machen, dann macht aber wieder der 9te Theil dieser Arbeiter auch nur den 9ten Theil von 72 Fuß, d. i. 3 Arb. machen 8 Fuß; 105 Arbeiter sind aber 35. 3 Arbeiter, also machen sie auch 35. 8 Fuß. — Man könnte auch sagen: es sind 108 — 3 Arbeiter, diese machen also auch 288 — 8 Fuß.

Hierbei haben wir von den Vortheilen Gebrauch gemacht, welche die Faktoren darbieten, ohne jener Regeln Erwähnung zu

thun; wo diese aber ausdrücklich gelernt sind, rechnet man kürzer und sicherer danach, wie etwa in folgendem Beispiele:

308 Arb. haben eine Arbeit in 207 Tagen gemacht, wieviel Tage werden 198 Arb. dazu brauchen? Was 308 Arb. in 207 Tagen thun, kann man als 308. 207 Tagewerke ansehen. In diese Tagewerke müssen sich 198 Arb. theilen. Wir erkennen an dem obigem Produkte die Faktoren 2, 11 und 9, welche sämmtlich auch in 198 sind, wir theilen daher nach den beiden Regeln 8 und 9 S. 47 uud erhalten 14. 23 : 2 = 7. 23.

Bei den Aufgaben aus der Gesellschafts- oder Vertheilungsrechnung darf hier von dem für Kinder des vorausgesetzten Alters noch zu schwierigen Begriffe des Verhältnisses kein Gebrauch gemacht werden; derselbe läßt sich aber auch bei allen Arten von Aufgaben leicht umgehen. z. B. Drei Kaufleute geben zu einem gemeinschaftlichen Geschäfte A 250, B 200, C 390 Thlr. Sie gewinnen 126 Thlr., wie viel erhält jeder? — Nennen wir den Gewinn an je 10 Thlr. einen Theil, welchen man schon hier zweckmäßig mit x bezeichnen kann, so erhält A 25 Theile oder 25 x, B 20 x, C 39 x. Dies sind zusammen 84 x oder 84 solcher Theile. Um alle zu befriedigen müssen wir also aus 126 Thlr. 84 Theile machen und davon dem A 25 u. s. w. geben. Ein Theil ist 126 : 84 = 21 : 12 = 7 : 3 = $2^1/_3$. Den Antheil des C berechnen wir aus dem des B nach der Regel 5), da 39 = 40 — 1 = 2. 20 — 1 ist. Beispiele mit zusammengesetzten Verhältnissen führt man auf einfache zurück. z. B. Zu einem Straßenbau hat A 21 Fuhren mit 4 Pferden, B 14 Fuhren mit 3 Pferden, C 28 Fuhren mit 2 Pferden gethan. Sie erhalten dafür 273 Thlr., wie viel trägt es jedem? — Man wird die Arbeit jedes einzelnen Pferdes bei einer Fuhre etwa eine Leistung nennen; dann müssen dem A bezahlt werden 21. 4 Leistungen u. s. w. — Man wird nun fragen: Welche Faktoren sind den Zahlen 21. 4, 14. 3, 28. 2 gemein? Dann nennt man das, was für je 14 Leistungen bezahlt wird einen Theil. A erhält 6 solcher Theile, B 3 und C 4.

Vierter Lehrgang.

Bruchrechnung und ihre Anwendung.

a) Gemeine Brüche.

Bei der Wiederholung der Erklärung des Bruchs, womit wir diesen Kursus beginnen, unterlassen wir nicht noch einmal durch geeignete Beispiele die Schüler zu einer klaren Auffassung des Unterschieds und des Zusammenhangs zwischen dem Bruch und dem Quotient zu nöthigen. — Wir beginnen zu diesem Zwecke mit leichtern Fragen, etwa so: 30 Arbeiter haben zusammen 17 Thlr. verdient. Einer derselben will ausbezahlt sein; wie berechnet ihr, wie viel es ihm trägt? — Muß man nun, um ihn auszuzahlen, die 17 Thlr. in Sgr. verwandeln, wie ihr es bei der Rechnung gemacht habt? — Gibt man ihm die 17 Sgr. nur von 1 Thlr., so hat er statt den 30ten Theil von 17 Thlr. was für einen Bruchtheil von 1 Thlr. erhalten? Ihr konntet also als den 30ten Theil von 17 Thlr. sogleich hinschreiben? — Ferner: Jemand will sich ganz kurz anmerken, daß er den 13ten Theil von 119 Thlr. zu empfangen hat, er schreibt sich dies an mit $^{119}/_{13}$ Thlr. Heißt denn dies der 13te Theil von 119 Thlr.? Warum gilt es aber dafür? — Wie könnt ihr die Probe darüber machen, daß $^{119}/_{13}$ Thlr. gleich dem 13ten Theil von 119 Thlr. ist? Antw. 13. $^{1}/_{13}$ Thlr. ist 1 Thlr.; $^{119}/_{13}$ sind nun 119. $^{1}/_{13}$ Thlr. also ist auch 119. 13. $^{1}/_{13}$ = 119 Thlr. Oder kurz: jedesmal $^{1}/_{13}$ 13mal genommen gibt 1 Ganzes, also sind auch $^{119}/_{13}$ 13mal genommen 119 Ganze.

Noch schärfer zeigen Unterschied und Gleichwerthigkeit von Bruch und Quotient Beispiele folgender Art: Wenn man von einer Linie von 1 Zoll Länge $^{29}/_{64}$ abschneiden soll, wie müßte man dies mit Hilfe des Zirkels anfangen? Getrautet ihr euch es so ausführen zu können? — Aber nun erinnert euch, daß ihr euch unter $^{29}/_{64}$ von 1 Zoll auch ein einziges Stück einer größern

Linie vorstellen könnt. — Umgekehrt: Kann man auf einem Blatt Papier, welches nur 1 Fuß lang ist, den 11ten Theil von 9 Fuß darstellen? — Was müßt ihr euch aber dann statt des 11ten Theils von 9 Fuß unter der darzustellenden Linie vorstellen?

Auch das Erweitern und Heben der Brüche verdient eine gründlichere und dabei anschaulichere Behandlung, als dies in der Regel statt zu finden scheint. Ueber die bequeme Erklärung, daß mit der Vergrößerung des Zählers der Bruch wächst, mit der des Nenners aber wieder abnimmt, will ich hier kein Wort verlieren; aber auch der gründlichere Beweis, hergeleitet aus den Regeln, wie ein Bruch mit einer ganzen Zahl multiplicirt oder dividirt wird, gehört nicht in den ersten Rechenunterricht, für welchen die größtmögliche Anschaulichkeit grundsätzlich festgehalten werden muß. Diese gewinnt man durch Vorübungen folgender Art: Man theilt Linien, Rechtecke, Kreise u. s. w. in eine Anzahl gleicher Theile und lehrt daran in anschaulicher Weise folgern, daß, wenn man das Ganze in 2, 3 . . . mal mehr Theile theilt, diese Theile dadurch auch 2, 3 . . . kleiner werden und umgekehrt. Durch solche Uebungen werden die Schüler bald in den Stand gesetzt sein zu folgern: Der Werth eines Bruches (und nicht der Bruch) bleibt ungeändert, wenn man Zähler und Nenner mit einer und derselben Zahl z. B. mit 3 multiplicirt, denn der Bruch erhält dadurch zwar 3mal mehr Einheiten, aber die Einheiten selbst werden dabei auch wieder 3mal kleiner. Man kann dies auch durch Vergleichung der Brüche mit benannten Zahlen klar machen. z. B. 4 Münzen können denselben Werth haben wie 20 andere. — An Volksschulen kann man sich auch darauf beschränken, mit Hilfe der erwähnten Zeichnungen an mehrern Beispielen zu erläutern, daß weil z. B. das Ganze 7 Siebtel und 21 Einundzwanzigstel hat, allemal 3 Einundzw. auf eine Siebtel gehen müssen. Dies befähigt sogleich die Schüler in einem bestimmten Falle, z. B. wenn $^{12}/_{21}$ gegeben sind, zu folgern, weil allemal $^{3}/_{21}$ = $^{1}/_{7}$, so gibt auch 4. $^{3}/_{21}$ den gleichwerthigen Bruch $^{4}/_{7}$; und umgekehrt, weil man z. B. aus jedem Fünftel 4 Zwanzigstel machen kann, so geben $^{4}/_{5}$ auch $^{16}/_{20}$.

Haben nun die Schüler die Zahlen von 1 bis 100 in ihre Faktoren zu zerlegen gelernt, so können sie auch sämmtliche Brüche, welche in diesen Zahlen ausgedrückt sind, ohne weiteres heben und man wird ihnen davon nur wenige Beispiele geben, es sei denn, daß man daran noch einmal jene Faktoren einüben will. Für das Heben größerer Brüche benutzt man zunächst die Kennzeichenlehre der Faktoren, 2, 3, 4, 5, 9 und 11, für deren Einübung sich hier die beste Gelegenheit darbietet. In Beispielen wie $^{4356}/_{9042}$, müssen deshalb die Schüler schon vor dem Heben angeben, daß der Zähler 4, 9, 11, der Nenner aber 2, 3, 11 zu Faktoren hat; bei $^{4653}/_{7761}$ verräth nur der Zähler die Faktoren 9 und 11; dies reicht aber auch hin, um zu ermitteln, ob sich der Bruch heben läßt. Denn zerlegt man damit den Zähler, so findet man 4653 = 9. 11. 47, wenn sich also der Bruch heben läßt, so kann dies nur mit 47 geschehen. — Wo uns aber auch dieses Mittel im Stiche läßt, sind wir dennoch nicht genöthigt zu dem wissenschaftlichen Satze vom größten gemeinschaftlichen Maße unsere Zuflucht zu nehmen, der wohl nur deshalb in die Rechenbücher Aufnahme gefunden hat, weil man ihn gar nicht oder doch nur sehr oberflächlich begründet. Für die Bedürfnisse des niederen Rechenunterrichts genügen die einfachen Sätze, aus welchen jener abgeleitet wird und die man selbst dann für sich zu üben nicht unterlassen darf, wenn man die Schüler auf den Satz vom größten gemeinschaftlichen Maße vorbereiten will. Diese Sätze sind:

1) Ist eine Zahl ein Faktor von einer andern, so ist sie auch noch Faktor von jedem Vielfachen derselben. — 1001 ist das Produkt von 13. 7. 11. — Wenn ihr nun 1001 noch mit irgend einer Zahl multiplicirt, so erhaltet ihr immer Vielfache des Produkts 13. 7. 11; wodurch werden diese Vielfache z. B. 5005 also auch immer noch theilbar sein? — Wenn ihr aber 5005 durch 13 theilt, wird dann der Quotient 385 auch noch einmal durch 13 sich ohne Rest theilen lassen?

2) Ist eine Zahl ein Faktor von zwei andern, so ist sie auch ein Faktor von ihrer Summe. Weil 91 = 7. 13 und 65 = 5. 13, so ist auch 91 + 65 d. i 156 = (7 + 5). 13 = 12. 13.

3) Ist eine Zahl ein Faktor von zwei andern, so ist sie auch noch ein Faktor von dem Unterschied derselben. — Weil 187 = 11. 17 und 119 = 7. 17, so ist auch 187 — 119 d. i. 68 = (11 — 7). 17 = 4. 17.

Gestützt auf diese leicht verständlichen Sätze wird man in fast allen Fällen den gemeinschaftlichen Faktor leicht zu bestimmen in Stande sein. Wir wollen dies an einigen Beispielen ausführen:

Es sei gegeben $^{221}/_{323}$. Wenn hier ein gemeinsamer Faktor zwischen Zähler und Nenner vorhanden ist, so muß er nach Regel 3) auch noch in 323 — 221 = 102 vorhanden sein; 102 verräth die Faktoren 2 und 3 und zerlegt sich in 2. 3. 17. Wenn also obiger Bruch sich heben läßt, so kann dies nur mit 17 möglich sein. Nun findet man 221 = 13. 17 also ist 17 der gemeinschaftliche Theiler, denn 323 = 221 + 102 = 13. 17 + 6. 17 = 19. 17. — Ist aber $^{1141}/_{4727}$ zu heben, so kann die Subtraktion zunächst nichts nützen, da die Differenz größer ist als 1141; bedenken wir aber, daß noch alle Faktoren von 1141 auch in 4. 1141 enthalten sind, so wird der gemeinschaftliche Faktor von 4727 und 1141 auch noch den Zahlen 4727 und 4. 1141 gemeinsam sein, also sich auch in ihrer Differenz 163 finden. Es fragt sich nun, ob 163 Faktoren hat; 2, 3, 5, 11 sind nicht darin enthalten, wir brauchen es dann nur mit 7 zu versuchen, da 13 schon nicht mehr Faktor sein kann, denn 13. 13 ist größer als 163, der zweite Faktor müßte also kleiner als 13 sein. Wir finden hierdurch, daß 163 eine Grundzahl ist. Nun ergibt sich durch die Division 1141 : 163, daß 1141 = 7. 163 und damit ist allemal schon erwiesen, daß 163 der gemeinschaftliche Faktor ist; denn nun ist 4. 1141 = 28. 163 aber 4727 = 4. 1141 + 163, also = 28. 163 + 1. 163 = 29. 163. —

In dem Bruche $^{12859}/_{23881}$ läßt sich zunächst heben durch 11 und man erhält $^{1169}/_{2171}$. Hier ist nun der Unterschied zwischen Nenner und Zähler noch zu groß, 2. 1169 = 2338 aber größer als der Nenner; dies ist indeß kein Hinderniß, denn in 2338 — 2171 = 167 müssen aus denselben Gründen noch die gemeinschaftlichen Faktoren von Zähler und Nenner vorhanden

sein; 167 ergibt sich wie vorher als Primzahl und 1169 : 167 ist = 7, also ist 2338 = 14. 167 und 2171 = 2338 — 167 = 13. 167.

In dem Beispiele $^{5369}/_{66493}$ findet man das Vielfache des Zählers, welches dem Nenner möglichst nahe kommt, durch die Division 66493 : 5369, wo der Rest der Division 2065 aus obigen Gründen die gemeinsamen Faktoren enthalten muß. 2065 ist aber = 5. 7. 59. Man muß nun so wohl 7 als 59 versuchen und findet, daß beide in 5369 aufgehen. Daraus ergibt sich wie vorher, daß obiger Bruch so wohl durch 7 als auch durch 59, gehoben werden kann, daß folglich 7. 59 = 413 das größte gemeinschaftliche Maß des Zählers und Nenners ist. Will man für Beispiele der letztern Art noch eine besondere Regel aufstellen, so läßt sich dieselbe leicht aus den Regeln 1 und 3 herleiten und lautet:

4) Der gemeinschaftliche Faktor zweier Zahlen ist auch noch ein Faktor von dem Divisionsreste derselben. — Auf diese letztere Regel stützt man sich auch am einfachsten bei der Ableitung des allgemeinen Verfahrens für das Aufsuchen des größten gemeinschaftlichen Maßes. Denn sind z. B. die Zahlen 79339 und 35581 gegeben, so muß nach dieser Regel ihr größtes gemeinschaftliches Maß auch noch ein Faktor von ihren Divisionsreste 8177 sein und zwar muß dieser wieder das größte Maß von 8177 und 35581 sein, weil wir aus dem Frühern wissen, daß jeder Faktor der diesem Rest und der kleinern Zahl gemein ist, auch in der größern aufgehen muß. Daher muß das, was wir suchen, auch wieder das größte gem. Maß des neuen Divisionsrests 2873 und des vorigen Divisors 8177 sein u. s. w.

Anmerkung. Man findet zuweilen in den Lehrbüchern für den Rechenunterricht ein annäherndes Verfahren die Brüche zu heben, welches zu wenig genauen Resultaten führt; so soll man z. B. statt $^{37}/_{53}$ nehmen $^{36}/_{52} = {}^{9}/_{13}$. Durch die Lehre von den Kettenbrüchen findet sich aber dafür der einfachere Bruch $^{7}/_{10}$, welcher sich von $^{37}/_{53}$ nur um $^{1}/_{530}$ unterscheidet, während der Unterschied zwischen $^{37}/_{53}$ um $^{9}/_{13} = {}^{4}/_{689}$, also über 3 mal

größer ist. — Will man den Vortheil, den die Kettenbrüche für diesen Zweck darbieten, auch der Volksschule zu gute kommen lassen, so hat man deshalb nicht nöthig auf diese Lehre weiter einzugehen, es genügt dazu, daß die Schüler die Division der Brüche verstehen. Es ist z. B. $37 : 53 = 1 : 1^{16}/_{37}$. Nimmt man nun für $^{16}/_{37}$ annähernd $^{1}/_{2}$, so findet sich $^{37}/_{53}$ annähernd $= 1 : 1^{1}/_{2} = {}^{2}/_{3}$, was bis auf wenigstens $^{1}/_{32}$ genau ist. Wünscht man einen höhern Grad von Genauigkeit, so gehe man ebenso einen Schritt weiter und setze $^{16}/_{37} = 1 : 2^{5}/_{16}$ und statt $^{5}/_{16}$ $^{1}/_{3}$, so erhält man statt $^{16}/_{37}$ den Näherungswerth $^{3}/_{7}$ und statt $^{37}/_{53} = 1 : 1^{16}/_{37}$ annähernd $1 : 1^{3}/_{7} = {}^{7}/_{10}$.

Das *Addiren und Subtrahiren* der Brüche wird für unsere Schüler, welche die Zahlen von 1 — 100 fertig in ihre Faktoren zerlegen können, in den allermeisten Fällen, nämlich in denen, bei welchen die Nenner die Zahl 100 nicht übersteigen, ein sehr leichtes Geschäft sein. Aber auch für größere Nenner wird die Behandlung am geschicktesten und vor allem am klarsten, wenn man sie auf die Zerlegung der Nenner in ihre Grundfaktoren stützt. Für höhere Lehranstalten muß ohnehin diese Uebung, die indeß wenig Zeit und Mühe erfordert, noch etwas weiter fortgesetzt werden. — Um das *Wie* an einem Beispiele zu zeigen sei die Zahl 5148 gegeben. Man erkennt daran die Faktoren 4, 9, 11 und findet $5148 = 2.^{2}\ 3.^{2}\ 11.\ 13$. Nun läßt man alle die Zahlen aufsuchen, welche in 5148 aufgehen, wobei der Lehrer die Schüler nach den Regeln der Kombinationslehre leitet, indem er der Reihe nach hinschreibt die Theiler, (im Ganzen 31) aus

je 1	je 2	je 3	u. s. w.	Faktoren,	
2	2. 2	2. 2. 3	2. 2. 3. 3	2. 2. 3. 3. 11	2. 2. 3. 3. 11. 13
3	2. 3	2. 2. 11	2. 2. 3. 11	2. 2. 3. 3. 13	
11	2. 11	2. 2. 13	2. 2. 3. 13	2. 3. 3. 11. 13	
13	2. 13	2. 3. 3	2. 3. 3. 11		
	3. 3	2. 3. 11	2. 3. 3. 13		
	3. 11	2. 3. 13	3. 3. 11. 13		
	3. 13	3. 3. 11			
	11. 13	3. 3. 13			
		3. 11. 13			

Dabei läßt er von recht vielen dieser Theiler angeben, wie oftmal dieselben in der Zahl 5148 enthalten sind, was aber nicht durch gewöhnliche Division, sondern dadurch gefunden werden darf, daß man die Faktoren des betreffenden Theilers, z. B. von 3. 11. 13 = 429 von den Faktoren der Zahl 5148 wegläßt. Dies Verfahren wird entweder aus der Regel 8 S. 47 abgeleitet oder indem man statt $5148 = 2^2 . 3^2 . 11 . 13$ schreibt $(3. 11. 13) (2^2 . 3) = 429. 12$.

An diese Uebungen knüpfen wir auch noch folgende: Theilt 5148 nach der Regel 8) S. 47 auch durch 88. Warum geht nun 88 nicht in 5148 auf? Antw. Weil wir hier 3 mal hinter einander mit dem Faktor 2 theilen mußten, während 5148 nur 2 Faktoren 2 hat. — Wenn ihr 5148 durch 393 = 3. 11. 7 nach derselben Regel theilt, welch einen Nenner wird der Bruch in dem Quotient haben, den ihr bei dieser Division erhaltet? — Auf diese Weise überzeugen wir die Schüler, daß eine Zahl nur dann in einer andern aufgeht, wenn diese alle Faktoren der erstern mindestens gleich oftmal enthält.

Mit diesen Vorübungen sind nun die Hauptschwierigkeiten bei der Addition und Subtraktion der Brüche geebnet. Zunächst leiten wir die Schüler zu der Einsicht, daß sich zum Hauptnenner am besten das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der gegebenen Nenner eignet. — Zu diesem Ende lassen wir sie zunächst kleine Brüche addiren, bei denen ein Nenner Hauptnenner ist, z. B. $^1/_3 + {}^5/_6$ u. s. w. Geben wir ihnen dann nach einigen solchen Beispielen auf etwa $^1/_2 + {}^2/_5$ zusammenzuzählen, so werden sie $^1/_2$ in Fünftel verwandeln wollen. Wir führen dies aus, indem wir fragen: da 1 Ganzes $^5/_5$ hat, wie viel Fünftel gehen auf $^1/_2$? — Antw. $2^1/_2$ Fünftel. — Also haben wir zu addiren $\frac{2^1/_2}{5} + {}^2/_5 = \frac{4^1/_2}{5}$. Aber $^1/_2$ Fünftel, der wie vielte Theil von 1 Ganzen ist dies? — Antw. $^1/_{10}$. — Und $^4/_5$ geben wie viel 10tel. Antw. $^8/_{10}$. Also ist $^1/_2 + {}^2/_5 = {}^9/_{10}$. Was hätten wir danach besser aus den Halben und Fünfteln gemacht? — Wir lassen dann Brüche, wie $^2/_3 + {}^3/_5$, $^1/_2 + {}^5/_7$ u. s. w. addiren, in welchen der Hauptnenner das Produkt beider Nenner ist. Dann folgen

Aufgaben dieser Art: $^3/_4 + {}^5/_6$. — Die Schüler werden wie vorher 24 zum Hauptnenner nehmen. Man läßt sie es dann auch einmal mit 18, 16 endlich mit 12 und 36 versuchen. — Warum erhält man nun keine Doppelbrüche bei den Nennern 12, 24, 36? — Antw. Die gegebenen Nenner müssen in den Hauptnenner aufgehen. — Die Zahlen, worin sowohl 3 als 6 aufgehen, sind Vielfache sowohl von 4 als auch von 6; welches dieser gemeinschaftlichen Vielfachen eignet sich am besten? — Man kann sie auch dadurch zu diesem Schlusse führen, daß man hinschreibt z. B. Es lassen sich verwandeln

6tel in 12tel, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54
8tel in 16tel, 24, 32 48, ...
12tel in 24tel, 36 48 . . . .

also 6tel, 8tel und 12tel zugleich in 24tel, 48tel . . .

Wie nun das kleinste gemeinschaftliche Vielfache zu finden ist, begreifen unsere Schüler alsbald, da sie schon wissen, daß eine Zahl nur dann in einer andern aufgehen kann, wenn ihre Faktoren sich sämmtlich unter den Faktoren der letztern finden. Geben wir ihnen z. B. auf, das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Zahlen 8, 6, 16, 54 zu suchen, so werden sie sogleich schließen: Die gegebenen Zahlen haben keine andern Faktoren als 2 und 3, keine derselben hat mehr als 4 Faktoren 2 und 3 Faktoren 3, also muß auch die gesuchte Zahl $2^4 . 3^3$ sein.

Uebersteigen die Nenner nicht die Zahl 100, so müssen die Schüler die Zwischenrechnungen im Kopfe auszuführen im Stande sein. Bei schwierigern Beispielen ordnen sie die Rechnung in folgender Weise an:

	Faktoren der Nenner.	Hauptnenner $2^2 . 3^2 . 5 . 7 . 19 = 23940$ Zähler der umgeformten Brüche.	
$^{37}/_{126}$	$2 . 3^2 . 7$	$2 . 5 . 19 . 37$	= 7030
$^{376}/_{665}$	5. 7. 19	$2^2 . 3^2 . 376$	= 13536
$^{113}/_{114}$	2. 3. 19	2. 3. 5. 7. 113	= 23730
$^{221}/_{648}$	$2^2 . 3^2 . 19$	5. 7. 221	= 7735
$^{163}/_{342}$	$2 . 3^2 . 19.$	2. 5. 7. 163	= 11410
			63441
			23940

Man untersucht nun zunächst, ob das Resultat sich heben läßt, was offenbar nur mit einem oder mehreren der bekannten Faktoren des Nenners möglich ist, in unserm Falle mit 9, 7, 19. Der Zähler 23730 konnte noch leichter gefunden werden, indem man 2. 3. 5. 7 = 210 von 23940 abzog, was sich sehr leicht daraus erklärt, daß 23940 = 210. 114 aber 23730 = 210. 113 ist.

In einem Beispiele wie $^{280}/_{319} + {}^{252}/_{253} + {}^{11}/_{667} = 1\,^{284}/_{319}$, wo die Zerlegung der Nenner viel Mühe machen würde, kann man die Untersuchung durch folgende Betrachtung abkürzen. Von 319 und 253 erkennt man den Faktor 11 und zerlegt sie damit in 11. 29 und 11. 23. Wenn nun 667 weder durch 23 noch durch 29 theilbar ist, so hat das Zerlegen dieser Zahl keinen Nutzen, 667 selbst muß dann doch Faktor des Hauptnenners sein.

Aus dem Vorhergehenden wird wohl schon zur Genüge erhellen, welche Vortheile man bei der Addition und Subtraktion der Brüche aus den Uebungen im Zerlegen der Zahlen in ihre Faktoren ziehen kann. Aber nicht bloß in die Behandlung dieser Operationen wird dadurch mehr Klarheit und Geschick gebracht; es bietet sich vielmehr sowohl beim niedern Rechenunterricht als bei dem mathematischen gar vielfach Gelegenheit dar, davon den nützlichsten Gebrauch zu machen. In den untern Klassen höherer Lehranstalten sollte man den verhältnißmäßig geringen Zeitaufwand für diesen Gegenstand immer übrig haben; aber auch in Volksschulen sollten die Kinder wenigstens die Eigenschaften der Zahlen von 1 — 100, von welchen im Rechnen am meisten Gebrauch gemacht wird, gründlich kennen lernen. Man würde dann auch das gewöhnliche Verfahren für das Suchen des Hauptnenners verlassen, das nur schwierig klar zu machen ist. Diese Schwierigkeit umgehet man freilich, indem man sich — selbst in größern Lehrbüchern — im Wesentlichen auf die bloße Beschreibung des Verfahrens beschränkt. Bezweckte man hier das Einsehen und nicht das bloße Absehen der Sache, so würde man sich bald überzeugen, daß die Schüler keine klare Einsicht in dasselbe gewinnen, wenn sie sich nicht mit der Faktorenlehre hinlänglich bekannt gemacht haben. Will man dies Verfahren beibehalten, so muß man es so ableiten

daß man zunächst mit Zahlen beginnt, welche keinen Faktor gemein haben, z. B. mit 3, 5, 7, wo als Hauptnenner 105 gefunden wird; fährt man dann fort mit 4, 5, 6, so finden die Schüler zunächst 120. Man zeigt ihnen nun, daß schon 60 genügt und daß der überflüssige Faktor 2 daher rührt, daß alle drei Faktoren 2 aus den beiden Zahlen 4 und 6 in den Hauptnenner gekommen sind, während doch nur zwei derselben nöthig waren. In dieser Weise schreitet man weiter fort zu zusammengesetztern Zahlen.

Das Multipliciren und Dividiren eines Bruchs durch eine ganze Zahl ist eine so einfache Sache, daß man hierbei nirgends die nöthige Klarheit vermissen sollte; dennoch kann ich es nach meinen Erfahrungen nicht für überflüssig halten, über die Behandlung derselben einige Andeutungen zn geben.

1) Das Multipliciren wird man etwa mit der Frage einleiten: Wie viel Einheiten hat $^5/_7$? — Wie viel Einheiten muß nun eine 3mal größere Zahl haben? Was gibt danach 3. $^5/_8$, 3. $^5/_9$? Aber $^{15}/_9$ ist einerlei mit $^5/_3$, wie ergibt sich dies unmittelbar aus 3. $^5/_9$? — Könnt ihr nicht erklären, warum $^5/_3$ 3 mal größer als $^5/_9$ ist, ohne daß ihr $^{15}/_9$ daraus bildet? — Zur Erläuterung etwa auch noch Fragen der Art: Gebt 2 verschiedne benannte Zahlen an, welche beide einen 4mal größern Werth als 7 Hlr. haben? (28 Hlr. und 7 Kr.) — Die eine hat also 4 mal mehr Einheiten von derselben Art, die andere ebenso viel Einheiten von einer 4mal größern Art. —

2) Das Dividiren eines Bruchs durch eine ganze Zahl muß dem Multipliciren mit einem Bruche nothwendig vorausgehen, da es ja in dem letztern zur Anwendung kommt. Man wird nun sogleich fragen können: Ihr habt so eben gelernt einen Bruch auf zweierlei Weise 3mal größer zu machen; ihr werdet nun auch im Stande sein den Bruch $^6/_{11}$ auf zweierlei Weise 3mal kleiner zu machen. ($^2/_{11}$ und $^6/_{33}$) — Wie muß im einen Fall die Menge der Einheiten, im andern die Größe derselben geändert werden?

3) Das Multipliciren mit einem Bruche ist nun nichts anders, als die aufeinanderfolgende Anwendung beider eben genannten Operationen und die Schüler begreifen den Sinn dieser

Multiplikation nur dann richtig, wenn sie wissen, daß dies nur eine kurze Bezeichnungsweise für die Verbindung der Multiplikation und Division ist. Dies liegt eben schon in dem Begriffe des Bruchs, wonach er ein oder mehrere Theile eines gleich getheilten Ganzen, das selbst wieder eine Zahl sein kann, darstellt. Daher sind die Schüler auch schon oben bei den ersten Erläuterungen dieses Begriffes im Wesentlichen damit bekannt geworden. Wir werden sie nun auch hier durch ähnliche Fragen auf den Sinn der Multiplikation mit dem Bruche führen, etwa in folgender Art: Wenn 1 Elle 8 fl. kostet, was werden da $^3/_4$ Ell. kosten? — Antw. $^1/_4$ Ell. kostet 2 fl., also $^3/_4$ Ell. 3. 2. fl. — Wie nun der 4te Theil von der Elle 3mal genommen $^3/_4$ Ellen oder $^3/_4$ von 1 Ell. gibt, so sagt man auch: der 4te Theil von 8 3mal genommen gebe $^3/_4$ von 8 oder $^3/_4 \cdot 8$. Was heißt demnach: irgend eine Zahl $^2/_3$, $^5/_6$, $^6/_7$ . . . mal nehmen? Ihr sehet also: Mit einem Bruche wird multiplicirt, indem man mit seinem Nenner dividirt und mit seinem Zähler multiplicirt.

Um die Regel ihrem Sinne entsprechend einzuüben wird man die beiden Operationen zunächst auch in der vorstehenden Reihenfolge ausführen lassen, was ohne dies in den meisten Fällen die Rechnung bequemer macht. Später zeigt man, daß es auch hier einerlei ist, ob man erst multiplicirt und dann dividirt oder umgekehrt verfährt.

4) Bei der Division mit einem Bruche erfordert sowohl die Klarheit der Begriffe als auch die praktische Anwendung, daß man sich nicht bloß auf den einen Fall des Enthaltenseins beschränkt (wie dies allgemein Brauch zu sein scheint); denn dies hat in allen den Fällen, in welchen der Divisor nur ein Verhältniß, der Dividend aber einen Werth vorstellt, gar keinen Sinn und man müßte dann doch noch nachträglich zeigen, daß, wenn man sich für den Zweck der Operation vorläufig die Sache anders denkt, dadurch dennoch kein falsches Resultat erhalten wird. Aber schon einem aufmerksamen Schüler wird es unbegreiflich, warum man diesen Umweg hier machen muß; zudem schließt der direkte Weg auch noch eine nützliche Belehrung über den Bruch als Verhältniß ein. Nehmen

wir etwa das Beispiel: A erhält von B als theilweise Zahlung 24 Thlr; dies beträgt $^3/_4$ von seiner ganzen Forderung; wieviel hatte hiernach A an B zu fordern? Wird man hier wohl den Schülern sagen: Sehet zu, wie vielmal das Verhältniß $^3/_4$ in dem Werth von 24 fl. enthalten ist? — Und welche Schwierigkeit macht es, statt dessen folgern zu lassen: $^3/_4$ der Forderung sind 24 Thlr., also ist $^1/_4$ = 8 Thlr., folglich die ganze Forderung = 32 Thlr. Damit haben sie aber schon diesen für so schwierig gehaltenen Fall begriffen; sie können 24 durch $^3/_4$ theilen, denn sie wissen nun die Zahl zu finden, wovon 24 Thlr. $^3/_4$ beträgt, d. h. die $^3/_4$mal genommen 24 gibt. Nach einigen derartigen Beispielen sehen die Schüler ein, daß man bei der Division mit einem Bruche in diesem Sinne mit dem Zähler dividiren und mit dem Nenner multipliciren muß.

Bei dem anderen Falle, wenn man fragt: wie vielmal ist $^3/_4$ in 6 enthalten, muß man dem Sinne nach erst mit dem Nenner multipliciren und dann mit dem Zähler dividiren; denn man muß erst die Ganzen in Viertel verwandeln und dann sehen, wie vielmal 3 Viertel in 24 Viertel enthalten sind, was man anfangs am besten in der vorstehenden Weise anschreibt, weil dann die Schüler alsbald einsehen, warum es nun nicht mehr auf den Nenner der gleichnamigen Brüche ankommt, zumal wenn man sogleich darauf die Frage folgen läßt: Wie vielmal sind nun 3 Fünftel in 24 Fünftel u. s. w. enthalten?

Da die Schüler nun schon aus dem frühern wissen, daß Multipliciren und Dividiren hinter einander in beliebiger Ordnung geschehen kann, so prägen sie sich nur die eine Regel ein.

Mit einen Bruche wird dividirt, indem man mit seinem Zähler dividirt und mit seinem Nenner multiplicirt.

Diese vorstehenden vier Regeln enthalten alles, was die Schüler über die Multiplikation und Division von Brüchen und mit Brüchen je zu wissen brauchen, um alle dahin gehörigen Rechnungen mit Geschick ausführen zu könnnen. Sie prägen dieselben wohl am kürzesten in folgender Form ihrem Gedächtnisse ein: Was (bei

der Multiplikation und Division) am Bruche geschehen soll, kann am Zähler oder am Nenner ausgeführt werden, am Zähler thut man, was am Bruche geschehen soll, am Nenner aber das Gegentheil. Wenn aber mit dem Bruche soll multiplicirt oder dividirt werden, so thut man das mit dem Zähler, was mit dem Bruche geschehen soll, zugleich aber auch mit dem Nenner das Gegentheil.

Sind die Schüler auf diese einfachen Regeln eingeübt und haben sie ihr Auge schon an den frühern Uebungen für die Eigenschaften der Zahlen geschärft, so bewegen sie sich bei diesen Rechnungen viel freier, als wenn man sie an den Mechanismus: Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner u. s. w. oder gar bei der Division an das sog. Umstürzen des Divisors bindet. Zunächst werden wir die Uebungen beginnen, nachdem die Schüler die erste der obigen vier Regeln kennen gelernt haben, mit Beispielen, wie $18.\ {}^{17}/_{12}$, woraus sie sogleich im Kopf nach der Regel 7 S. 47 bilden müssen $3.\ {}^{7}/_{2} = {}^{21}/_{2}$; an $154.\ {}^{122}/_{143}$ erkennen sie den gem. Faktor 11 und rechnen: $14.\ {}^{122}/_{13} = \frac{(13 + 1).\ 122}{13} = 122 +$ ${}^{122}/_{13}$, wofür manche auch schon setzen werden

$$122 + \frac{130 + 8}{13} = 122 + 10 - {}^{8}/_{13}.$$

Zur Einübung der Regel 2 kennen die Schüler bei ${}^{91}/_{125} : 104$ den Faktor 13 in 91 und 4 in 104, zerlegen daher 104 in 4. 26. und führen die Aufgabe nach Regel 8 S. 47 auf ${}^{1}/_{125} : 8$ zurück. — Für die Regel 3 sei gegeben ${}^{247}/_{756} \times 504$. Man erkennt sogleich die gemeinsamen Faktoren 4 und 9 und findet dann durch Anwendung der Regel 9 S. 47 ${}^{247}/_{21}.\ 14 = {}^{247}/_{3}.\ 2$, oder einfacher zunächst $(1 - {}^{5}/_{756}).\ 504 = 504 - {}^{5}/_{3}.\ 2 = 500{}^{2}/_{3}$.

Bei der Multiplikation von Brüchen mit Brüchen (leichtere Fälle übergehend) wird der Schüler bei der Aufgabe ${}^{704}/_{225} \times$ ${}^{405}/_{616}$ sich zunächst zu fragen haben: Kann ich mit einzelnen Faktoren von 704 den Nenner des andern Bruchs theilen und kann ich ebenso die Division mit 225 theilweise am Zähler des andern Bruchs ausführen. — Er findet hierdurch die Aufgabe zurückge-

führt auf $\frac{8}{5} . \frac{9}{7}$; $\frac{8}{9} . 12\frac{6}{7}$, wird durch theilweise Division mit 3 zu $\frac{8}{3} . 4\frac{2}{7} = \frac{8}{3} . \frac{30}{7} = 8 . \frac{10}{7} = 7 . \frac{10}{7} + \frac{10}{7}$; $12\frac{3}{5} . 15\frac{5}{6}$ gibt zunächst $12 . 15 + \frac{3}{5} . 15 + 12 . \frac{5}{6} + \frac{3}{5} . \frac{5}{6} = 180 + 9 + 10 + \frac{1}{2} = 199\frac{1}{2}$. — Aber auch $18\frac{7}{15} . 25\frac{11}{12}$ läßt man noch so ausführen und selbst eine oder das andere Beispiel, wobei die Rechnung mit unächten Brüchen vortheilhafter sein würde; denn die Schüler sollen aus den Beispielen selbst finden, wann der eine und wann der andere Weg der bequemere ist. — Beispiele wie $11\frac{19}{20} . 13\frac{8}{9}$ werden noch so gerechnet: gibt $(12 - \frac{1}{20})(14 - \frac{1}{9}) = 168 - 1\frac{1}{3} - \frac{7}{10} + \frac{1}{180} = 266 - (\frac{1}{30} - \frac{1}{180}) = 266 - \frac{5}{180}$.

Um nun auch wenigstens an einem besondern Falle der Division zu zeigen, wie unsere Schüler hierbei verfahren werden, sei $225\frac{45}{56} : \frac{63}{64}$ auszuführen. Sie erkennen sogleich, daß der Dividend sich mit dem Faktor 9 des Zählers theilen läßt; sie erhalten dann $25\frac{5}{56} : \frac{7}{64}$ und führen nun die Multiplikation mit dem Nenner theilweise aus, wodurch $200\frac{5}{7} : \frac{7}{8}$ und dann $\frac{1405 . 8}{49}$ erhalten wird.

Die vorstehenden Beispiele mögen vielleicht schon zeigen, daß wenn man sich bloß auf die Hauptregeln, welche sich unmittelbar aus dem Sinne der Operation ergeben, beschränkt, die Schüler beim Rechnen diesen Sinn nicht so völlig über den Mechanismus unbeachtet lassen oder doch leicht wieder auf denselben hingewiesen werden können; auch eignen sie sich hierdurch eine größere Gewandtheit und Umsicht an, welche denselben an höhern Lehranstalten später beim Umformen algebraischer Ausdrücke und Gleichungen sehr zu statten kommen wird. — Der bequemen Bezeichnung Heben bedienen wir uns hierbei vorerst nicht, bis die Schüler sich die Regeln, worauf wir dasselbe stützen, geläufig gemacht haben; ist dieser Zweck erreicht, so haben damit unsere Schüler auch nebenbei das Heben sicherer und geschickter ausführen gelernt, als wenn wir sie bloß auf diesen Kunstgriff eingeübt hätten.

Nachdem die Schüler sich einige Fertigkeit in der Anwendung der Multiplikations- und Divisionsregeln erworben haben, kann man zur Anwendung derselben, insbesondere auf Regeldetriaufgaben,

übergehen, wobei sich noch hinlänglich Gelegenheit zur weitern Einübung finden wird. Auch hierbei wird sich zeigen, daß man von der Bruchrechnung eine um so leichtere und zweckmäßigere Anwendung machen kann, je enger die Rechenregel an den Begriff der Operation sich anschließt. Denn wenn z. B. gefunden werden soll, wie hoch $^2/_5$ Pf. von einer Waare kommen, von welcher $^3/_4$ Pf. $2^1/_2$ fl. kosten, so kann man zunächst fragen, was kostet $^1/_4$ und dann was kostet 1 ganzes Pf. und dies führt sogleich auf die obige Regel von der Division mit einem Bruche. Nun zeigt man den Zusammenhang dieser Aufgaben mit der Division noch unmittelbarer dadurch, daß man fragt: was muß der Quotient von $2^1/_2 : {}^3/_4$ für eine Eigenschaft haben oder wie macht ihr die Probe über die Richtigkeit des Quotients? Hierdurch finden sie dann, daß $^3/_4$ des Preises von 1 Pf. auch den Preis von $^3/_4$ Pf. geben muß, daß man also hierbei diejenige Zahl sucht, welche $^3/_4$ mal genommen $2^1/_2$ fl. gibt. — Ebenso hängt nun die weitere Beantwortung der Frage unmittelbar mit unserer Erklärung von der Multiplikation mit einem Bruch zusammen, denn 2 mal der 5te Theil von 1 Pf. der Waare kostet auch 2mal den 5ten Theil des Preises von 1 Pf.

Im nächsten Kursus werden wir sehen, daß auch die auf die Gleichheit von Verhältnissen sich gründenden Schlüsse eben wieder höchst einfach auf die andere Bedeutung der Division, welche wir als M e s s e n, von dem eben vorher angewandten Theilen unterschieden haben, zurückgeführt werden können. — Hier möge nur nur noch ein Beispiel zeigen, daß man beim Ausrechnen von Ansätzen mit obigen einfachen Regeln nicht nur ausreicht, sondern dadurch auch mehr geistige Thätigkeit und Geschick in dieses sonst allzu mechanische Geschäft bringt. z. B. Wenn das Malter Korn $8^4/_5$ Thlr. kostet, wiegt das 4Groschenbrod $3^5/_6$ Pf.; wie viel wird dasselbe wiegen bei einem Kornpreise von $7^7/_{10}$ Thlr.? — Antw. Kostet das Malter Korn nur 1 Thlr., also $8^4/_5$ mal weniger, so wird das Brod $8^4/_5$ mal mehr, d. i. $^{44}/_5 \cdot {}^{23}/_6$ Pf. wiegen; wird nun der Preis der Frucht wieder $7^7/_{10}$ mal größer als eben vorher angenommen ist, so wird das Gewicht des Brods auch

$7^7/_{10}$ mal kleiner, also nur $= {}^{44}/_5 . {}^{25}/_6 : {}^{77}/_{10}$ sein. Hier werden nun die Schüler zunächst mit 11 dividiren und mit 10 multipliciren nach den Regeln 7, 8, 9 S. 47 und dann erhalten

$$= 4 . {}^{23}/_3 : 7 = \frac{4 . 23}{21} = \frac{4\ (21 + 2)}{21} = 4^8/_{21}.$$

Zur Einübung der Brüche eignen sich auch Aufgaben der Vertheilungsrechnung, bei welchen man noch keinen Begriff vom Verhältniß zu geben braucht. z. B. A hat von 80 Ctr. Waare $^1/_5$, B $^3/_8$, C $^1/_4$ und D den Rest zu empfangen. Welch einen Bruchtheil beträgt der Rest und wie viel erhält jeder? (was alles mündlich zu berechnen ist.) — Auch schwierigere Beispiele folgender Art können hier schon gemacht werden: So oft A 3 Theile erhält, soll B 5 und so oft B 6 Theile empfängt, soll C 7 haben. B erhält also $^5/_3$ mal den Antheil des A und C $^7/_6$ mal den Antheil des B. Bezeichnet man den Antheil des A mit x, so erhält A $^5/_3$ x und C $^7/_6$. (oder $\times$) $^5/_3$ x $= {}^{35}/_{18}$ x. Denkt man sich also das, was A erhält, aus 18 Theilen bestehend, so erhält B 30 und C 35 dieser Theile.

b) Das allgemeine Gesetz des Numerirens.

Das Schreiben und Lesen größerer Zahlen muß schon aus dem Grunde hier noch einmal vorkommen, weil es von den jüngern Schülern gar leicht vergessen wird; außerdem gehört aber auch zur Auffassung des ganzen Gesetzes eine größere Reife, als wir im Beginne des dritten Lehrgangs noch voraussetzen konnten. Hierzu bietet sich nun vor dem Beginne der Lehre von dem Decimalbrüchen, welche wir auf eine Erweiterung des dekadischen Zahlensystems gründen werden, eine passende Gelegenheit.

Wir hatten oben das Zahlensystem durchgeführt bis zur siebten Stelle; dies werden wir zunächst wiederholen, insbesondere durch Diktiren von Zahlen. Dann schreiten wir zur Mittheilung und Erklärung des ganzen Gesetzes etwa in folgender Weise: Wenn ihr zu der größten Zahl, die ihr bis jetzt geschrieben habt, (9999999) noch 1 E hinzufügt, was erhaltet ihr dann? Antw. 9 M und noch 1 M, also zehn M. — Da wir 10 Einheiten nicht

mit einer Ziffer schreiben können, so werden wir, wie bisher, daraus wieder eine noch höhere bilden, die wir einen Zehner der Million (Zm) nennen, da sie aus zehn einfachen Million, welche nun Einer der Million heißen sollen, ebenso entsteht, wie der Z aus zehn E; und da nun die Zahlen auch noch über die Zm hinauswachsen können, so werden wir wieder 10 Zm zu einer höhern Einheit zusammenfassen müssen, die wir wie nennen werden? — Antw. Hunderter der Million (Hm). — Ihr sehet also, wir schreiten von der M aus ebenso zu höhern Einheiten fort, wie früher von dem E aus. — Wie werden wir demnach über die Hm hinaus weiter aufsteigen? Antw. Zu den Tausend- (Tm), Zehntausend- (Ztm) und Hunderttausendmillion (Htm). — Diese 6 Stellen bilden nun die zweite Klasse des Zahlensystems, welche wir die Klasse der Million nennen, während die 6 Stellen der ersten Klassen die der Einer heißen. Jede dieser Klassen besteht nun wieder aus zwei Ordnungen zu je 3 Stellen, nämlich aus den Einern, Zehnern, Hundertern und aus den Eintausendern, Zehntausendern, Hunderttausendern.

Ehe wir weiter zu den höhern Klassen fortschreiten, befestigen wir das Gesagte erst durch einige Uebungen. Wir diktiren vorzugsweise Zahlen, in welchen viele Stellen mit Nullen auszufüllen sind und zwar in Anfange alle Stellen der Einerklasse. Wir versuchen dann auch den Schülern einen genauern Begriff von der Größe der über die Million hinausgehenden Zahlen zu geben, indem wir ihnen einige merkwürdige Zahlen erläutern, z. B.: der Abstand der Sonne beträgt 20'008084 Meilen; berechnet nun, wie lange unsere Reise dauern müßte, wenn es uns möglich wäre mit der auf den Eisenbahnen vorkommenden Geschwindigkeit von 4 Meilen in der Stunde dahin zu reisen. — Der Umfang der Erdbahn ist 62'857400 Meilen. Wenn nun die Erde bei ihrer Bewegung um die Sonne keine größere Geschwindigkeit als die Eisenbahnen besäße, wie viel unser jetzigen Jahre würde dann ein einziges Jahr dauern? Wie viel unserer Jahre würde ein Monat umfassen, wenn man dann das Jahr auch wieder in 12 Monate theilte. — Die Dauer des menschlichen Lebens, = 70 J.

angenommen, würde dann nur wieviel Monate betragen? — Antw. Etwa $^1/_{50}$ Monat. Oder: Wenn ihr eine Million Thaler zählen solltet, so daß ihr Tag und Nacht hindurch in jeder Sekunde einen zählt, wieviel Tage würde dies Geschäft dauern? — Auch einige Beispiele zur Wiederholung und Fortsetzung der Uebungen im Auflösen höherer Einheiten des Zahlensystems in niedere, in Verbindung mit Anwendungen, dürfen hier nicht fehlen wie z. B.: Man schätzt die Anzahl aller Menschen auf der Erde auf 1350'000000. Wie viel Staaten könnten dieselben bilden von der Größe des Großherzogthums Hessen mit etwa 1 M Einwohner? Wie viel Städte von der Größe Münchens mit ungefähr 1 Ht Einw. ließen sich damit bevölkern u. s. w.

Zur weitern Fortführung des Zahlensystms wird man nun nur noch zu bemerken nöthig haben, daß 10 Htm wieder die niedrigste Einheit der nächstfolgenden Klassen geben, die wir die Klasse der Billion nennen und die ganz ebenso aus 6 denen der vorhergehenden Klassen gleichnamigen Stellen bestehen. Bezeichnet man sie mit Eb, Zb, Hb, u. s. w. und läßt dieselben unter sich und dann auch mit den entsprechenden Einheiten der niedern Klassen vergleichen (z. B. wieviel Em geben 1 Eb, wie E geben 1 Eb u. s. w.) so wird dieser gesetzmäßige Zusammenhang den Schülern alsbald klar und geläufig werden und sie werden im Stande sein jede noch so große Zahl auszusprechen, wenn man ihnen nur die Benennungen der auf einander folgenden Klassen angibt. Jede Klasse besteht zwar aus zwei Ordnungen zu je 3 Ziffern, es ist jedoch nicht zu empfehlen, die Ziffern von je 3 zu 3 durch ein zwischengesetztes Komma abzutheilen; denn abgesehen davon daß dies Mißverständnisse mit der üblichen Bezeichnung der Decimalbrüche herbeiführt, wird eben dadurch das deutliche Hervortreten der sechsstelligen Klassen, welche das Auge recht wohl mit einem Blicke umfassen kann, gestört.

Wir schließen diesen Abschnitt mit einigen Uebungen folgender Art, welche den Schülern die Erklärung des Mechanismus der Multiplikation und Division wieder in das Gedächtniß zurückrufen

und sie zugleich auf den folgenden Abschnitt vorbereiten. — Was für Einheiten geben die Produkte der einzelnen Ziffern bei der Multiplikation von 708000 mit 356000? — Wenn man den Abstand der Sonne = 20'008084 M. mit 231651 multiplicirt, so erhält man den Abstand des nächsten Fixsterns von der Erde. — Wie führen wir diese Multiplikation aus, wenn es uns im Produkt auf kleinere Einheiten als M nicht ankommt? (Wir beginnen mit der höchsten Ziffer 2 des Multiplikators und nehmen für 4 E × 2 Ht 1 M u. s. w.) — Neptun, der äußerste Planet, steht von der Sonne 600'982219 M. ab, wievielmal ist hierin der Abstand der Erde von der Sonne = 20 M Meilen, oder der des Monds von der Erde = 50000 Meilen enthalten, wenn es uns auf einen Bruchtheil dabei nicht ankommt? — (Man theilt im letztern Falle 60098 Zt : 5 Zt.)

c) Die Decimalbrüche.

Der Vorzug, welchen die Decimalbrüche vor den gemeinen Brüchen haben, daß sich mit denselben wie mit ganzen Zahlen rechnen läßt, ist darin begründet, daß sie eine Fortsetzung unseres Zahlensystems rückwärts über die Einer hinaus bilden. Schon dieser Zusammenhang mit den ganzen Zahlen weist darauf hin, die Erklärung der Decimalbrüche und die Ableitung der Regeln in analoger Weise durchzuführen; zugleich aber wird auf diesem Wege die ganze Darstellung anschaulicher und lehrreicher, als auf dem gewöhnlichen, auf die gemeinen Brüche zurückführenden (auf den wir indeß die Schüler zu ihrer allseitigern Belehrung ebenfalls gelegentlich hinleiten). Wir führen daher die Schüler durch Fragen folgender Art auf die Bedeutung der Decimalbrüche.

Wie ändert sich der Zahlenwerth der Ziffer 7 in der Zahl 777 von Stelle zu Stelle? — Könnt ihr auch 7 Einheiten angeben, die 10mal kleiner sind als 7 E? — Wir wollen diese neuen Einheiten bezeichnen mit Z', was bedeutet nun 7 Z', 8 Z' . . .? — Wenn wir 7 Z' zu der Zahl 777 hinzufügen, welche Stelle muß diese Ziffer 7 (in Beziehung zu den übrigen) einnehmen? Wenn wir nun in unserer Zahl 7 H 7 Z 7 E 7 Z' die Namen

der Einheiten weglassen wollen, so müssen wir uns wenigstens merken, welche Stelle die E bedeuten soll; dies kann durch ein Komma hinter dieser Stelle geschehen. Wie leset ihr demnach 777,7? — Was bedeutet hiernach 5,6? — Könnt ihr diese Zahl noch auf eine Art aussprechen, ähnlich wie ihr 5 Z 6 E auf zweierlei Weise aussprecht. Antw. Sechsundfünfzig Z'. Ebenso sprecht 8,7 auf zwei verschiedene Arten aus. — Da 8,7 einerlei ist mit $8^7/_{10}$, einer gemischten Zahl, und 87 Z' einerlei mit $^{87}/_{10}$, einem unächten Bruche, so haben wir 8,7 im ersten Falle wie eine gemischte Zahl, in dem andern wie einen unächten Bruch gelesen. In der Form 8,7 wie eine ganze Zahl geschrieben, heißt dieselbe ein Decimalbruch. — Leset ebenso 3, 8 als gemischte Zahl und als unächten Bruch. Auf wie vielerlei Art könnt ihr nun 7 Z 5 Z' lesen? Antw. Auf dreierlei, nämlich 7 Z + 5 Z', 70 E + 5 Z', 705 Z'. Wie schreibt ihr dieselbe als Decimalbruch? — Ebenso mit 3 Z 6 E 4 Z', 9 H 5 E 7 Z'. — Wie nennen wir den 10ten Theil von 1 Z'? — Die Hundertel (H') bilden also wieder 10mal kleinere Einheiten, als die Z'. Wie viel H' geben demnach 3 Z'? Welche Stellen werden die H' daher (in Bezug auf die Z') einnehmen? Wie schreibt ihr also 4 E 3 Z' 6 H' als Decimalbruch? Sprechet auch diese Zahl auf vier verschiedne Arten aus. — Wie leset ihr 0,36?

In dieser Weise geht man Schritt für Schritt weiter vorläufig bis etwa zu den Millionteln, (M') indem man dabei aber zunächst nur wenige Stellen in jeder Zahl ausfüllt. Man schreibt z. B. hin 3 E 7 T' 5. M' und fragt: wie viel Z', H' T' u. s. w. sind in dieser Zahl enthalten? An welche Stellen kommen die einzelnen Ziffern, wenn ihr diese Zahl als Decimalbruch schreibt?

Ehe wir nun zum Diktiren der Dicimalbrüche übergehen, stellen wir noch folgende Fragen: Wenn ihr die Zahl 317 Zt' (Zehntausendel) schreiben sollt, so müßt ihr wieviel verschiedene Einheiten daraus machen? Antw. 300 Zt' geben 3 H'; 10 Zt' sind = 1 T'. Wie schreiben wir also diese Zahl als Decimalbruch? — Das Schreiben erleichternd, aber minder übend ist folgender Weg: Wenn ihr die Decimalbrüche als unächte Brüche oder gemischte

Zahlen aussprecht, so erhaltet ihr nur Brüche mit was für Nennern? Wie hängt die Anzahl der Nullen in diesen Nennern mit der Anzahl der Stellen hinter dem Komma, welche man die Decimalen nennt, zusammen? — Wenn ihr nun dreihundertundsiebzehn Zehntausendtel schreiben sollt, so füllt ihr mit den Ziffern des Zählers wie viel Stellen aus? Aber wegen des Nenners muß die Zahl wie viel Decimalen erhalten? An welche Stelle müßt ihr nun noch eine Null setzen? — Wie würde aber die Zahl lauten, wenn ihr geschrieben hättet 0,3170?

Zum Addiren und Subtrahiren der Decimalbrüche bedürfen die Schüler keiner besondern Anweisung; vom Gleichnamigmachen der Brüche ist nach unserer Auffassung keine Rede, höchstens kann man als Vorbereitung auf die Subtraktion zwei Brüche der Art 7,583 und 7,58300 stellenweise lesen lassen, wobei die Schüler sogleich bemerken, daß das Anhängen von Nullen am Ende eines Decimalbruchs auf den Werth desselben keinen Einfluß hat. (Zur Uebung kann man dann beide Brüche noch als unächte Brüche aussprechen lassen und nach der Regel von den gemeinen Brüchen fragen, wonach die Werthe derselben gleich sein müssen.) — Kommt ein Schüler mit einer Subtraktion wie 3,7 — 0,985, nicht sogleich zu Stande, so schreibt man ihm hin: 3 E + 7 Z' — (9 Z' + 8 H' + 5 T) und hilft dies noch nicht, so läßt man ihn erst subtrahiren 3 Pfd. 7 Lth. — 9 Lth. 8 Qu. 5 Cent.

Der Multiplikation und Division schicken wir folgende Uebungen voraus. Worin unterscheiden sich die beiden Zahlzeichen 5,378 und 53,78? Vergleicht die Werthe der nämlichen Ziffern in beiden? — Wie ändert sich also der Werth eines Decimalbruchs, wenn man das Komma eine Stelle vorrückt? Und wie, wenn man es eine Stelle zurücksetzt? — Ebenso nun mit 0,0375 und 3,75 u. s. w. — Schließlich werden dann die Schüler die vollständige Regel aussprechen: Ein Decimalbruch wird mit 10, 100 u. s. w. multiplicirt oder dividirt, wenn man das Komma 1, 2 u. s. w. Stellen nach rechts oder links setzt. — Nachträglich kann noch der Beweis aus den Bruchregeln 1 und 2 S. 65 so geführt werden: Wie heißen die Zähler der beiden Brüche 7,58 und 0,00758? Diese

sind also dieselben, wie habe ich aber den Nenner durch Versetzen des Kommas geändert?

Diese Regel wird nun sogleich eingeübt an Multiplikationsbeispielen folgender Art 500 × 0,358 u. s. w., wo die Schüler nach Regel 7 S. 47 zuerst mit 100 und dann mit 5 multipliciren, also 5. 35,8 ohne weitere Anleitung ausführen müssen. Auch bei Divisionen wie 36,8:800 bedürfen die Schüler nur einer Hinweisung auf Regel 8 S. 47 um daraus zunächst zu machen 0,369:8. Können sie nun nicht weiter fortfahren, so läßt man sie erst 367:8 ausführen und fragt dann: Wie ihr hier zunächst den 8ten Theil von 36 Z genommen habt, so müßt ihr bei der Division von 0,368 den 8ten Theil nehmen von welchen Einheiten? — Antw. Von 36 H'. Wie ihr oben die 4 Z des Restes in 40 E verwandeln und die 8 E hinzunehmen mußtet, so hier? Und wie ihr dort im Quotient zuerst Z und dann E erhieltet, so erhaltet ihr hier? Antw. Zuerst H' und dann T'. Bei spätern Beispielen, bei welchen der Divisor nicht aufgeht, leitet man auf die Fortsetzung der Division hin durch Vergleichung mit benannten Zahlen z. B. 13 Thlr. 5 Sgr.: 7; denn wie hier der Rest der Sgr. in Pf. verwandelt wird, so in 13,5:7 der Rest der Z' in H'.

An diese Uebungen reiht sich ohne Schwierigkeit die Multiplikation und Division mit einer mehrzifferigen ganzen Zahl z. B. 348 × 0,0357, was man zunächst noch so anschreiben kann 8. 0,0357 + 40. 0,0357 + 300. 0,0357 = 8.0,0357 + 4. 0,357 + 3. 3, 57, wodurch die Rechnung auf die vorausgegangene zurückgeführt ist. Oder man kann die Schüler, die ja von vorn herein gelernt haben niedere Einheiten in höhere und umgekehrt zu verwandeln, so rechnen lassen: 40. 7 Zt = 4. 7 T', 300. 7 Zt' = 3. 7 H' u. s. w.

Bei Divisionsaufgaben wie 0,079 : 83 wird man zunächst fragen: Von welchen Einheiten des Dividends erst sind genug vorhanden um den 83ten Theil davon nehmen zu können? Antw. Von den T'. — Und was für Einheiten müßt ihr als Theil erhalten? Antw. T'. Also setzt an die Stellen der E, Z', H' Nullen.

Der Multiplikation mit einem Decimalbruche schicken wir folgende Fragen voraus: Was heißt eine Zahl z. B. 80 mit 0,3 oder $^3/_{10}$ multipliciren? Was gibt demnach 0,3 × 80? 0,3 × 800 u. s. w. Ebenso 0,04 × 70 u. s. w. — Was für Einheiten erhält das Produkt 0,4 ×0,7? Antw. H′. — Einheiten welcher (Decimal-) Stelle erhält man als Produkt einer 1ten Decimale mit einer 2ten z. B. 0,6 × 0,07? Antw. Einheiten der 3ten Stelle, denn man erhält 6 × 0,007 = 42 T′. — Diese Uebungen setzt man so lange fort, bis den Schülern die folgende Regel einleuchtet und geläufig ist: das Produkt zweier Decimalen rückt um die Summe ihrer Abstände vom Komma hinter dasselbe — oder kommt so viel Stellen hinter das Komma, als beide Faktoren zusammen von demselben abstehen.

Diese Regeln und ihre Begründung üben wir durch Fragen folgender Art ein: Was für Einheiten gibt z. B. die Ziffer 5 des einen Faktors im Produkt von 2,6507 × 19,5843 mit 9 im andern? — An welche Stelle kommt das Produkt etwa der Ziffer 6 des einen Faktors mit der Ziffer 8 des andern u. s. w.? — Sollten nun dennoch beschränktere oder unaufmerksame Knaben die Multiplikation nicht auszuführen im Stande sein, so wird man ihnen statt der vorgelegten Aufgabe z. B. statt 3,578 × 0,536 aufgeben die ganzen Zahlen 3578 × 536 zu multipliciren und nun jedesmal fragen? Statt der 6 × 8 E erhaltet ihr bei den Decimalbrüchen? Antw. 6 × 8 M′. — Statt der 6 × 7 Z oben 6 × 7 Ht′ u. s. w. Führt man beide Rechnungen neben einander aus, so werden die Schüler alsbald wahrnehmen, daß sie sich nur die Stelle der kleinsten Einheiten nach obiger Regel zu merken haben, um das Komma richtig zu setzen.

Zu der Regel, wie ein Decimalbruch mit einem andern multiplicirt wird, kann man freilich auf kürzerm Wege aus der entsprechenden für gemeine Brüche gelangen; allein abgesehen davon, daß die mit unserer Darstellung verbundnen Uebungen nöthig erscheinen, um die Schüler mit dem Wesen der Decimalbrüche ganz vertraut zu machen, gewinnen wir auch damit die Regel, auf welche

wir leicht und sicher das abgekürzte Verfahren stützen können, zu dem wir nun übergehen wollen.

Das abgekürzte Multipliciren und Dividiren wird häufig gar nicht gelehrt und doch sollte wenigstens ersteres grade der gewöhnlichere Fall sein. Denn die meisten Decimalbrüche sind ja doch unvollständig und außerdem haben die letzten Stellen des Produkts meist keinen noch zu berücksichtigenden Werth. — Auf das Verfahren, welches man bei der abgekürzten Multiplikation beobachtet, sind unsere Schüler nun sehr leicht hinzuleiten. Wir gehen dabei von einem bestimmten Beispiele, wie 3,785 × 9,0356 aus und fragen: wenn wir kleinere Einheiten als Zt′ in diesem Produkte für werthlos halten und deshalb auch die Mühe sparen wollen dieselben zu berechnen, welche Stellen des Multiplikands brauchen wir dann mit der 3ten Decimale des Multiplikators nicht zu multipliciren? Welche nicht mit der 2ten, 1ten? Aber mit den E des Multiplikators haben wir alle Stellen des Multiplikands zu multipliciren; wir fangen daher mit dieser höchsten Stelle am besten die Rechnung an, dann streichen wir bei der

9,0376
3,785
271128
63263
7230
451
34,2072

Multiplikation mit der ersten Decimale 7 die Ziffer 6 des Multiplikands durch, da dieselbe mit allen folgenden Stellen des Multiplikators zu kleine Einheiten gibt; aber da 42 Ht′ noch 4 Zt′ enthalten, so zählen wir dieselben zu den 7. 7 Zt′ hinzu, wodurch wir 53 Zt′ erhalten. — Schreiten wir nun im Multiplikator zur nächst niedrigern Stelle fort, so müssen wir auch wieder eine Stelle im Multiplikand ausstreichen; aber wir würden dann 56 Ht′ vernachläßigen, worin doch noch 5 Zt′ enthalten sind. Wir nehmen aber richtiger 6 Zt′ herüber, weil dies = 60 Ht′, jenes nur = 50 Ht′ u. s. w.

0,907843
20,30056
18156860
272353
453
54
18,329720

Noch auf zwei besondere Fälle wird man die schwächern Schüler durch eine Frage aufmerksam machen müssen, wenn nämlich, wie in anstehendem Beispeile das Produkt der zwei zuerst mit einander zu multiplicirenden Stellen eine höhere Stelle gibt als die, welche man noch berücksichtigen will, wie hier

z. B. 2 Z. 3 M' = 6 Ht', während man nach M' berechnen wird; und dann wenn, wie im Beispiele 0,0755 × 3,0576, wo das Produkt nur auf 4 Stellen berechnet werden soll, von vorn herein mehrere (2) Stellen durchgestrichen werden müssen. — Die Schüler werden hier sogleich aus der Regel 8 S. 47 folgern: die 2te Decimale mit der 4ten kommt an die 6te, die 2te mit der 3ten an die 5te Stelle, beide Produkte fallen daher weg.

Die Division mit einem Decimalbruche wird in der Regel auf den einen Fall der Division gemeiner Brüche durch einander zurückgeführt, wobei man sie auf einerlei Benennung bringen muß; aber abgesehen davon, daß dies nicht immer dem Sinne der Division entspricht, führt es auch zu einem Umwege; denn hiernach müßte für 0,37583 : 2,78 zuerst gesetzt werden 37574 : 278000 und in dieser Weise wird man doch die Division nicht wollen ausführen lassen. Die Schüler müssen zunächst erst wieder mit 1000 theilen und erhalten dann 37,583 : 278. Grade dieses finden sie aber unmittelbar aus der Divisionsregel mit einem Bruche, welche wir oben für die allein nothwendige angesehen haben; denn danach hat man mit dem Divisor 2,78 zwei Rechnungen auszuführen, eine Division mit dem Zähler 278 und eine Multiplikation mit dem Nenner 1000. Die letztere nehmen wir hier am besten erst vor und erhalten dadurch 37583, was nun noch durch den Zähler 278 zu theilen ist. — Uebrigens werden wir, obgleich der eben gezeigte Weg der kürzeste und zweckmäßigste ist, die Schüler doch zuvor auch einige Divisionen bloß aus den Begriffe des Decimalbruchs und des Quotients ableiten lassen, weil wir darin eine sehr nützliche Uebung erkennen. Wir werden zu diesem Behufe fragen: In dem Beispiele 0,2438 : 0,73 suchet ihr eine Zahl von welcher Eigenschaft? Antw. Die mit 0,73 multiplicirt, 0,2438 gibt. — Zunächst werden wir also die Zahl suchen, welche mit 0,73 multiplicirt 0,243 gibt oder diesem sehr nahe kommt. — Was für Einheiten geben aber mit H' multiplicirt T'? Antw. Z'. — Die erste Stelle des Quotients ist also 0,3 u. s. w.

Auch das abgekürzte Dividiren bietet große Vortheile dar, wenn man die spätern Stellen des Quotients vernachläßigen darf,

insbesondere, wenn der Dividend — wie dies die Regel sein wird — unvollständig ist. — Die annähernde Richtigkeit des Verfahrens erklären wir wohl am einfachsten daraus, daß der Quotient ungeändert bleibt, wenn man Dividend und Divisor mit mit einer und derselben Zahl theilt, wie wir dies an nachfolgenden Beispielen ersehen werden.

7,9438 : 0,953 gibt zunächst 7943,8 : 953.

7943,8 : 953 = 8,325.
3198
239
48
1

Sobald die Schüler an den Rest 239 eine Null anhängen wollen, bemerkt man denselben, daß in der Regel die spätern Stellen unbekannt sind, daß sie also durch Anhängen der Null einen unrichtigen Dividend erhalten werden, meist einen etwas zu kleinen. Nehmen wir nun den Divisor auch etwas kleiner, nämlich = 950, so können wir statt 2390 : 950 jetzt theilen 239 : 95. Verhältnißmäßig ist nun aber der Divisor mehr verkleinert als der Dividend. Denn wäre die uns unbekannte Stelle des Dividend etwa 4, so hätten wir statt 2394 gesetzt 239 d. i. eine $10^4/_{239}$mal kleinere Zahl, während im Divisor statt 953 genommen ist 95 d. i. eine $10^3/_{95}$ mal kleinere Zahl. Dies gleichen wir nun wieder dadurch aus, daß wir die durchgestrichene Ziffer 3 des Divisors auch mit 2 multipliciren und für das Produkt 6 1 zur nächst höhern Stelle herüber nehmen, also 191 statt 190 subtrahiren. — Will man gern den Quotient auf 4 Dec. berechnen, so hängt man an den Rest 239 eine Null an. Man erhält dann als Quotient 8,3251. Als vollständigen Quotient, wenn man an alle folgende Reste auch eine Null anhängt, erhält man 8,32508. — Von besondern Fällen möge hier nur noch angedeutet sein: 0,094 : 7,8457, wofür man nehmen wird 940 : 78457 = 0,012 und nicht 0,0119, da ersteres genauer ist.

Um den Zusammenhang der vorstehenden Lehren nicht zu unterbrechen bringen wir die Verwandlung der gemeinen Brüche in Decimalbrüche am Schluß. Wir stellen zu diesem Zwecke den Schülern die Aufgabe etwa den 8ten Theil von 5 Ganzen sowohl als gemeinen Bruch als auch als Decimalbruch darzustellen. —

Wir geben ihnen dann umgekehrt zuerst den gemeinen Bruch $^{11}/_{16}$ und fragen, warum könnt ihr hier ebenso verfahren, wie vorher? Antw. Weil $^{11}/_{16}$ von 1 Ganzen gleich dem 16ten Theil von 11 Ganzen ist. — Wir nehmen dann Beispiele, welche Perioden geben und beginnen am besten mit dem Nenner 7, weil dabei alle möglichen Reste vorkommen und die Schüler hier alsbald die Nothwendigkeit erkennen, daß einer der frühern Reste wiederkehren muß. Wir belehren sie an diesem Beispiele auch, mit welchem Grade von Genauigkeit man statt $^{6}/_{7}$ setzt 0,9 und nicht 0, 8 oder 0,86 statt 0,85 . . . u. s. w. — Daß nur dann ein geschlossener Bruch entsteht, wenn der Divisor keine andere von denen des Dividends verschiedene Faktoren hat, als 2 und 5, zeigen wir am besten mit Hülfe der vielfach geübten Regel, daß man mit den Faktoren des Divisors nach einander theilen kann, wie in anstehender Rechnung.

$$
\begin{aligned}
{}^{13}/_{32} = 13 : 32 &= 0{,}40625 \\
130 : 32 &= 65 : 16 \\
10 : 16 &= 5 : 8 \\
50 : 8 &= 25 : 4 \\
10 : 4 &= 5 : 2 \\
10 : 2 &= 5 : 1
\end{aligned}
$$

Nachdem 5 Nullen hinter einander angehängt worden sind, hat sich auch der ganze Divisor weggehoben.

Das Zurückführen der periodischen Brüche auf gemeine bietet hier für uns kein besonderes Interesse; statt dessen mögen einige Beispiele folgen, woran man den Schülern zeigen kann, daß die Stellenzahl der Periode bloß vom Divisor abhängt, also für den nämlichen Divisor immer die nämliche bleibt. Theilen wir z. B. 1 : 9 so erhalten wir 0,11111 . . ., also gibt auch z. B. $^{7}/_{9}$ = 0,777 . . .; 1 : 11 gibt 0,090909, daher ist auch z. B.

$$
\begin{array}{r}
0{,}73 : 11 = 0{,}0657 \\
657 \\
657\ \ldots \\
\hline
0{,}066363
\end{array}
$$

1 : 37 gibt 0,027027027 . . ., also ist auch etwa

$$
\begin{array}{r}
0{,}36 : 37 = 0{,}00927 \\
927 \\
927 \\
\hline
0{,}00927927927\ \ldots
\end{array}
$$

Fünfter Lehrgang.

Angewandte Rechnungsarten.

Anwendungen der arithmetischen Regeln auf die Rechnungen des gemeinen Lebens sollen sich, wie wiederholt angedeutet wurde, durch alle frühern Kurse hindurch ziehen und wir setzen daher hier voraus, daß in den leichtern dieser Uebungen schon die nöthige Fertigkeit erzielt ist. Alle schwierigern Anwendungen aber, welche schon eine längere Reihe von Schlüssen erfordern, haben wir auf die letzte Stufe des gemeinen Rechenunterrichts verschoben und fassen sie mit dem Quadrat- und Kubikwurzelausziehen zu einem fünften Kursus zusammen. Die Anwendungen, welche wir auf dieser Stufe machen lassen, auf welcher wir ein durchschnittliches Alter der Schüler von zwölf Jahren voraussetzen, müssen von der Art sein, daß die Schüler nach einiger Anleitung dieselben auch selbständig zu lösen im Stande sind. Aufgaben, wie sie sich nicht selten in den Rechenbüchern finden, die das Kombinationsvermögen die Schüler dieses Alters noch überschreiten und zu deren Lösung daher meist ein vom Lehrer vor den Schülern anzustellendes Raisonnement gehört, dürfen nur höchst ausnahmsweise vorkommen. Will man die Schüler in den Stand setzen derartige Aufgaben selbständiger zu lösen, so scheue man sich auch nicht schon Gleichungen auf dieser Stufe einzuführen, deren Form das Kombiniren und Folgern wesentlich zu erleichtern vermag.

Wir beginnen diesen angewandten Kursus zunächst mit einfachen Regeldetriaufgaben, obgleich vorausgesetzt wird, daß unsere Schüler schon auf allen frühern Lehrstufen damit beschäftigt worden sind und in deren Lösung sich eine hinlängliche Fertigkeit erworben haben. Hier sollen uns dieselben vorzugsweise dazu dienen, den Begriff des Verhältnisses klar zu machen und zur Anwendung zu bringen. Diesen Begriff fassen wir so einfach wie möglich, um alle Unbestimmtheit und Unklarheit, welche in der Regel darüber bei den Schülern herrscht, zu beseitigen. Wir leiten denselben unmittelbar aus Aufgaben ab.

Aufgabe. Wie viel Zinsen bringen 350 Thlr. zu 5 Proc. in einem Jahre?

Bedingungssatz: 100 Kap. . . . . 5 Zinsen

Fragesatz: 350 „ x „

Auflösung. Je 100 Thlr. bringen 5 Thlr. Zinsen. Wie vielmal habe ich hier aber 100 Thr. ausgeliehen? — Antw. $3^1/_2$mal. — Also werde ich auch die 5 Thlr. Zinsen $3^1/_2$mal erhalten.

2. Aufgabe. Wie viel Zinsen bringen 75 Thlr. Kapital zu $4^1/_2$ Proc. jährlich?

Auflösung. 75 Thlr. beträgt was für einen Bruchtheil des Kapitals von 100 Thlr.? — Antw. $^3/_4$. — Wenn ich aber nur $^3/_4$ von 100 ausleihe, werde ich auch noch nicht die ganzen Zinsen einnehmen, welche 100 Thlr. bringen, sondern was für einen Bruchtheil davon?

3. Aufgabe. Wenn das Malter Korn $6^3/_5$ Thlr. kostet, kauft man das Pfund Brod für $2^1/_3$ Sgr.; wie theuer wird 1 Pf. Brod, wenn der Kornpreis $9^3/_7$ ist?

Auflösung. Wir ordnen die Angaben wieder in den Bedingungs- und Fragesatz und fragen: Wie vielmal theurer ist das Korn geworden? — Antw. $1^3/_7$ mal. — Wie vielmal theurer wird also auch ein Pfund Brod geworden sein? — Wäre umgekehrt vorher der Kornpreis $9^3/_7$ und nachher nur $6^3/_5$ gewesen, so läßt man dennoch anfangs die Schüler die größere Zahl durch die kleinere theilen; denn die Ausführung der Rechnung ist für unsere Schüler gleich einfach, mögen sie mit dem gefundnen Verhältnisse multipliciren oder dividiren, aber der Schluß: weil die Frucht $1^3/_7$mal billiger ist, deshalb auch das Brod, ist Anfängern jedenfalls klarer als der umgekehrte, weil der Fruchtpreis jetzt nur $^7/_{10}$ von dem vorigen ist, deßhalb ist auch der Preis des Brods nur der Bruchtheil $^7/_{10}$ vom vorigen Preise; ganz unzulässig ist es in diesem Falle sich auszudrücken: die Frucht kostet $^7/_{10}$mal weniger, also auch das Brod.

Das Dividiren jedesmal der größern Zahl durch die kleinere wird dann (wenigstens vorläufig) nothwendig, wenn man es mit indirekten Verhältnissen zu thun hat. z. B. Wenn der Korn-

preis $7\frac{11}{12}$ Thlr. ist, kauft man für 4 Sgr. 3 Pf. Brod. Wie viel kauft man für 4 Sgr., wenn der Kornpreis nur $4\frac{2}{9}$ Thlr. beträgt? — Auflösung. Das Korn ist jetzt $1\frac{7}{8}$mal billiger, also erhält man $1\frac{7}{8}$mal mehr Brod für dasselbe Geld.

Erst nachdem eine hinlängliche Anzahl solcher Beispiele gelöst ist, geben wir den Schülern folgende Erklärung: die Zahl, womit die eine von zwei Größen multiplicirt werden muß um die andere hervorzubringen, heißt das Verhältniß der letztern zu der erstern. — Welches war das Verhältniß der Kapitalien in unsern ersten Beispielen, und welches das ihrer Zinsen? — Wir sagen daher: die Kapitalien verhalten sich hier grade wie ihre Zinsen u. s. w. — Wie groß war das Verhältniß der Kornpreise im letzten Beispiel und wie groß das der Mengen Brod? — Wir sagen in diesem Falle: die Brodgewichte verhalten sich umgekehrt wie die Fruchtpreise. — Warum? — Aus unseren Beispielen würde sich nun auch leicht die Regel ableiten lassen, daß man die Glieder eines Verhältnisses mit einer und derselben Zahl multipliciren oder dividiren darf; indeß bietet sich dazu eine viel passendere Gelegenheit bei der Vertheilungsrechnung dar, wo wir zuerst Veranlassung haben, davon Gebrauch zu machen.

Die Auflösung der zusammengesetzten Regeldetriaufgaben kann nun keine weitern Schwierigkeiten machen, da sich bei denselben im Wesentlichen nur die Uebungen wiederholen, welche bei den einfachen vorgekommen sind. Wendet man dabei die Methode der Zurückführung auf die Einheit an, so bildet sich der Ansatz so leicht und ist meist die Berechnung so bequem auszuführen, daß man auch für rein praktische Zwecke von künstlichern Regeln, deren Mechanismus der Rechner doch meist gedankenlos Preis gegeben ist, keinen Gebrauch machen sollte. Dies wird schon aus einem Beispiele erhellen.

Aufgabe. Aus $60\frac{1}{2}$ Pf. Garn kann man 5 Stücke Zeug verfertigen, wovon jedes Stück 50 Ellen lang und $1\frac{3}{4}$ Ell. breit ist; wieviel Stück wird man hiernach aus 231 Pf. weben können, wovon jedes $41\frac{2}{3}$ Ell. lang und $2\frac{1}{4}$ Ell. breit sein soll, so daß aber das Gewebe $1\frac{1}{3}$mal dichter wird als vorher.

Die Angaben werden wenigstens für den Anfang in nachstehender Weise geordnet:

Bedingungssatz:	$60\frac{1}{2}$ Pf.,	5 Stk.,	50 Ell. lang,	$\frac{7}{4}$ br.,	Dichte 1
Fragesatz:	231 „	x „	$41\frac{2}{3}$ „ „	$\frac{9}{4}$ „	„ $1\frac{1}{3}$

Hieraus ergibt sich nun der Ansatz:

$\frac{5.\ 2.\ 231.\ 50.\ 3.\ 7.\ 3}{121.\ 125.\ 9.\ 4}$, welchen die Schüler durch folgende Fragestellung sehr leicht finden: Wie viel Stück aus 1 Pf. Garn? — Antw. $60\frac{1}{2}$mal weniger also $5 : 60\frac{1}{2}$. — Wieviel Stück aber nun aus 231 Pf.? — Antw. 231mal mehr als aus 1 Pf. — Wieviel Stück, wenn jedes nur 1 Elle lang werden soll — Antw. 50mal mehr. — Je wieviel der 1 Elle langen Stücke gehen aber auf je 1 Stück, wovon jedes $41\frac{2}{3}$ Ellen lang ist? — Antw. $41\frac{2}{3}$, also erhält man $41\frac{2}{3}$mal weniger, als eben zuvor. — Dabei sind die Stücke noch wie breit? — Wenn nun jedes Stück statt $\frac{7}{4}$ nur $\frac{1}{4}$ breit sein soll? — Antw. Dann gibt es 7mal mehr Stücke. — Nun sollen aber die Stücke wieder 9mal breiter werden, nämlich nicht $\frac{1}{4}$, sondern $\frac{9}{4}$ breit, wieviel dann? — Antw. 9mal weniger. — Wenn aber die Dichte $1\frac{1}{3}$mal größer werden soll, so gibt eine Menge Garn, die vorher zu $1\frac{1}{3}$ Stück ausreichte, jetzt nur ein Stück, also statt je $1\frac{1}{3}$ Stück erhält man jetzt nur 1 Stück, oder so oft in der vorigen Menge Stücke $1\frac{1}{3}$ Stück enthalten ist, erhält man jetzt nur 1 Stück.

Anfangs wird man noch häufiger Zwischenfragen der Art stellen, wie dies oben rücksichtlich der Breite geschehen ist, welche zu der Anzahl $\frac{5.\ 2.\ 231.\ 50}{121.\ 125}$ der Stücke gehört, bei welcher bloß die Menge Garn und die Länge sich geändert hatten. Sobald sich die Schüler einige Sicherheit im Ansatze erworben haben, werden sie schon, während sie ansetzen, auch die Rechnung abzukürzen suchen und z. B. die Multiplication mit 231 nach den Regeln S. 47 und S. 65 durch Division mit dem Faktor 11 von $231 = 21.\ 11$ in den Nenner 121 und die Division mit 125 nach Regel 2 S. 65 sogleich am Zähler, welcher in 5. 50 drei Faktoren 5 enthält, ausführen.

Obgleich die an vorstehendem Beispiele entwickelte Methode zur Auflösung der zusammengesetzten Regeldetriaufgaben aller Art völlig ausreicht, so wird man dabei doch nicht länger verweilen, als nöthig ist, um die Schüler einige Fertigkeit in der Anwendung gewinnen zu lassen, denn wir wollen die Schüler nicht zum gedankenlosen Fortgehen im betretnen Gleise abrichten, sondern wir opfern lieber etwas von der mechanischen Sicherheit, welche in der Praxis nöthigenfalls noch leicht erworben werden kann, um dafür durch größere Mannigfaltigkeit der Behandlung eine größere geistige Gewandtheit zu fördern. Wir wenden daher nun auch noch die auf die Gleichheit der Verhältnisse sich gründende Schlußform zur Auflösung dieser Aufgaben an, wodurch sich ohnedies die Rechnung oft kürzer und zweckmäßiger gestaltet. Zur Vergleichung möge zunächst das vorige Beispiel hier noch einmal auch in dieser Weise gerechnet werden. Die Schüler schließen dabei, durch den Lehrer geleitet, folgendermaßen: da wir im zweiten Falle 231 : $^{121}/_{2} = {}^{42}/_{11}$mal mehr Garn haben, so werden wir auch $^{42}/_{11}$mal mehr Stück, d. i. $\frac{42.\ 5.}{11}$ Stücke bekommen. Dabei haben die Stücke aber noch eine Länge von 50 Ellen; sollen dieselben aber nur $41^{2}/_{3}$ Ellen lang sein, so waren sie vorher $50 : 41^{2}/_{3}$ d. i. $^{6}/_{5}$mal länger oder sie sollen jetzt $^{6}/_{5}$mal kürzer werden, also kann man auch $^{6}/_{5}$mal mehr d. i. $\frac{6.\ 42.\ 5}{5.\ 11} = \frac{6.\ 42}{11}$ Stücke machen. Diese Stücke sind jedoch noch $^{7}/_{4}$ breit; sollen sie aber $^{9}/_{4}$ breit, also $^{9}/_{7}$mal breiter werden, so erhält man auch $^{9}/_{7}$mal weniger Stücke, also $\frac{4.\ 6.\ 42}{9.\ 11} = \frac{8.\ 14}{11}$ Stück. Endlich soll das neue Zeug aber auch noch $1^{1}/_{3}$mal dichter werden; so oft wir vorher $1^{1}/_{3}$ Stück hatten, erhalten wir jetzt nur 1 Stück, also dividiren wir mit $1^{1}/_{3}$. Dabei werden Schüler, welche das Multipliciren und Dividiren in Brüche und mit Brüchen so gelernt und geübt haben, wie dies oben gelehrt ist, keinen weitläufigen Ansatz bilden, sondern sie werden stetig durch vollständige oder theilweise Ausführung der Zwischenrechnungen das Resultat so umgestalten, daß es

die einfachste und bequemste Form annimmt. Es wird daher durch diese Auflösungsweise mehr, als durch die vorige, Gewandtheit im Folgern und in der Ausführung der Rechnung gefördert. Dabei wird sich hinlänglich gezeigt haben, wie wichtig es ist, daß die Schüler sich klare Begriffe über das Multiplieiren und Dividiren mit Brüchen und Geschick in der Ausführung desselben angeeignet haben; sie reichen damit viel weiter als mit all den künstlichen Regeln der sog. praktischen Rechenbücher, die ohnedies — um sie von vornherein als geistlosen Mechanismus zu behandeln, meist ohne Beweis gegeben werden. — Nehmen wir z. B. die Kettenregel, ein sehr beliebter, weil bequemer Mechanismus der Geschäftsleute, so wird ihre Begründung ein Leichtes für Schüler sein, denen die Begriffe der Multiplikation und Division hinlänglich klar und geläufig sind. — Ein Beispiel wird dies hinreichend zeigen. Eine Maschine kostet in England 950 Pf. Sterl., die Spesen der Versendung machen 5 Proc., Transport und andere Kosten betragen 18 Proc. Sie soll mit 20 Proc. Gewinn in preuß. Thalern verkauft werden, wobei man 5 Pf. Sterl. = 34 preuß. Thlrn. rechnet. Welche Summe muß dafür gefordert werden? Wir bilden zunächst den bekannten Ansatz

x pr. Thlr.	950 Pf. St.
5 Pf. St.	34 pr. Thlr.
100 Thlr. ohne Spesen und Kosten	123 Thlr. mit Spesen und Kosten
100 Thlr. ohne Gew.	120 Thlr. mit Gewinn.

Wir schließen nun: so oftmal die Maschine 5 Pf., Sterl. kostet, macht es in preuß. Gelde 34 Thlr. also $\frac{950.\ 34}{5}$ Thlr.; so oft nun in dieser Summe von Thalern je 100 ohne die Kosten enthalten sind, macht es mit den Kosten 123 Thlr.; dies gibt $\frac{950.\ 34.\ 123}{5.\ 100}$ So oft man aber 100 Thlr. ausgegeben hat, will man. 120 einnehmen; dies führt ohne Weiteres nun zu der bekannten Regel, daß die rechte Seite des Ansatzes den Dividend, die linke den Divisor des Resultates bildet. — (Sollte man es hiernach für möglich halten, daß eine so einfache Sache,

die nur das Verständniß der Multiplikation und Division erfordert, noch wie ein für die Schüler unbegreifliches Kunststück behandelt wird?)

Schließlich möge noch ein kleines Beispiel aus der Zins- oder aus der Rabattrechnung darthun, wie einfach man derartige Aufgaben behandeln kann, wenn nur die elementaren arithmetischen Begriffe und Regeln von den Schüler wirklich begriffen und mit Verstand geübt sind.

Aufgabe. Welche Summe wird baar bezahlt für eine Forderung von 1200 Thlr., die erst nach 8 Monaten fällig ist, wenn dabei ein Rabatt von $4\frac{1}{2}$ Proc. auf 100 für das Jahr gewährt wird. — Auflösung. Wenn man jetzt 100 Thlr. zu $4\frac{1}{2}$ Proc. auf Zinsen anlegt, so erhält man nach 8 Mt. an Zinsen 3 Thlr. Wer also nach 8 Mt. 103 Thlr. schuldig ist, kann jetzt statt dessen 100 Thlr. zahlen; da diese ja dem Gläubiger nach 8 Mt. zu 103 Thlr. anwachsen; so oft man also gegenwärtig 103 Thlr. schuldig ist (d. i. $^{1200}/_{103}$ mal) so oftmal zahlt man = 100 Thlr., also beträgt die Baarzahlung $^{1200}/_{103} \times 100$ Thlr. — Man sieht, wie viel einfacher und klarer diese Auflösung sich ergibt, wenn man die künstliche Form der Proportionen vermeidet.

Nächst den zusammengesetzten Regeldetriaufgaben sind die der Gesellschafts- oder Vertheilungs- und der Mischungsrechnung von praktischer Wichtigkeit, weshalb wir sie hier durch einige Beispiele erläutern wollen. Es ist zwar oben im vierten Abschnitte, wohin wir die einfachern Fälle der Repartitionsrechnung verwiesen haben, gezeigt worden, daß sich diese Aufgaben klar und zweckmäßg behandeln lassen, ohne daß man dabei den Begriff des Verhältnisses zu ententwickeln braucht; es gewinnen indeß in verwickeltern Fällen die Erklärungen und Regeln an Gleichförmigkeit und Schärfe, wenn man sie auf denselben stützt. Einer weitläufigen Vorbereitung bedarf es dabei für unsere Schüler nicht, sondern wir führen dieselben an einem Beispiele sogleich mitten in die Sache.

Aufgabe. A und B nehmen zusammen ein Lotterieloos, A gibt dazu $9\frac{3}{4}$ Thlr., B $17\frac{1}{3}$ Thlr; sie gewinnen damit 300 Thlr., wieviel trägt es jedem? Auflösung. Wer wird den größern

Antheil am Gewinn erhalten? — Wie findet ihr, wieviel mal der Antheil des B größer sein muß, als der des A? — Führen wir diese Division aus, so erhalten wir $^{16}/_{9}$. Was gibt dieser Quotient bei den Zahlen $17^{1}/_{3}$ und $9^{3}/_{4}$ an? — Oben haben wir die Zahl, womit eine von zwei Größen oder Zahlen multiplicirt werden muß um die andere zu erhalten, das Verhältniß der beiden Größen oder Zahlen zu einander genannt; in welchem Verhältnisse steht also die Einlage des B zu der des A? — Antw. Sie ist $1^{7}/_{9}$mal größer. — Da auch die Zahl 16 $1^{7}/_{9}$mal größer ist als 9, so sagen wir: auch die Einlage des B verhält sich zu der des A wie 16 zu 9. — Wie verhält sich aber die Einlage des A zu der des B? — Da also B $^{16}/_{9}$mal mehr gegeben hat, so wird auch sein Gewinn $^{16}/_{9}$mal soviel als der des A betragen oder der Gewinn des B verhält sich zu dem des A, wie 16 zu 9. — Wenn wir also dem A 9 Theile geben, wieviel solcher Theile muß dann der B erhalten? — Hätte noch ein dritter C einen Beitrag z. B. $21^{2}/_{3}$ Thlr. gegeben, so hätte dieser wie vielmal mehr als A gezahlt? Wenn also A 9 Theile erhält, muß C erhalten?

2. Aufgabe. Zu einem gemeinschaftlichen Geschäfte hatte B 207 Thlr. auf $2^{3}/_{4}$ Jahr, A 308 Thlr. auf $4^{1}/_{2}$ J., C 117 Thlr. auf $4^{2}/_{5}$ J. hergegeben; sie gewinnen zusammen 5885 Thlr., wie werden sie diesen Gewinn unter sich vertheilen?

Auflösung. Nennen wir das, was bei diesem Geschäfte in einem Jahre an je einem Thaler gewonnen wird, x, so gewinnt der A in jedem Jahre 207x also in $2^{3}/_{4}$ J. $2^{3}/_{4}$. 207 x. oder 207. $2^{3}/_{4}$ x; ebenso gewinnt B 308. $4^{1}/_{2}$ x und C. 117. $4^{2}/_{5}$ x. — Wie findet man nun hieraus die Verhältnisse der Gewinne von B und C zu dem des A? — Antw. Wenn wir die Divisionen 308. $^{9}/_{2}$:207. $^{11}/_{4}$ und 117. $^{22}/_{5}$:207. $^{11}/_{4}$ ausführen. — Welche Faktoren haben hier Dividend und Divisor gemein? — Was thut ihr nun zuerst, um diese Divisionen zweckmäßig auszuführen? — Antw. Wir theilen erst mit den Faktoren 9 und 11? — Wir haben also nun noch mit den einfachern Zahlen 23.$^{1}/_{4}$, 28. $^{1}/_{2}$ und 13.$^{2}/_{5}$ die Divisionen vorzunehmen. — Die gesuchten Verhältnisse werden jetzt aus Zahlen gefunden, welche wie aus den ursprüng-

lichen entstanden sind? — Antw. Indem man diese mit denselben Zahlen dividirt hat. — Wir wollen uns daher merken: das Verhältniß der Zahlen bleibt ungeändert, wenn man sie mit derselben Zahl dividirt. — Wir finden nun das Verhältniß von B zu A = $^{56}/_{23}$, und von C zu A = $^{104}/_{115}$. In Vergleich mit B müßte A 23, in Bezug auf C aber 115 Theile erhalten. Worin müßten aber die Verhältnisse übereinstimmen, damit wir ebenso wie im vorgehenden Beispiele vertheilen könnten? Da aber $^{56}/_{23} = \frac{5.\ 56}{5.\ 23} = \frac{280}{115}$ ist, so ersehen wir, daß, wenn wir dem A 115, dem B 280 und dem C 104 Theile geben, die Verhältnisse der Antheile immer noch richtig bleiben. — Diese letztern Zahlen entstehen aber aus den oben gegebenen, indem wir die gemeinschaftlichen Faktoren durch Division herausschaffen und die Brüche durch Multiplikation aller Zahlen mit 20 beseitigen. — Wir wollen uns daher merken, daß die Verhältnisse gegebener Zahlen sich nicht ändern, wenn man sie sämmtlich mit einer und derselben Zahl multiplicirt oder dividirt. — Aus welcher frühern Regel könnt ihr auch rechtfertigen, daß man dasselbe erhält, ob man z. B. $7^3/_4 : 5^5/_6$ ausführt oder $7^3/_4 \times 12 : 5^5/_6 \times 12$?

4. Aufgabe. Drei Maurer sollen nach Verhältniß des Fleißes, welchen sie bei einem Baue bethätigt hatten, mit einer Summe von $29^5/_{12}$ Thlr. belohnt werden. Nun hatte A in derselben Zeit 561 Ziegeln gelegt, in welcher B mit 429 fertig wurde und C legte nur 462 in der nämlichen Zeit, in welcher A 528. A war demnach $^{561}/_{462} = {}^{17}/_{13}$mal fleißiger als B und $^{528}/_{462} = {}^{8}/_{7}$mal fleißiger als C. So oft daher A einen Theil erhält, erhält B $^{17}/_{13}$mal weniger, das ist $1 : {}^{17}/_{13} = {}^{13}/_{17}$ von diesem Theile und ebenso erhält C $^7/_8$ von jedem Theile, welcher dem A gegeben wird. Aus wieviel Theilen werden wir uns nun wohl die Belohnung des A bestehend denken müssen, damit sowohl $^{13}/_{17}$ als auch $^7/_8$ dieser Anzahl ganze Zahlen geben? — Antw. Aus 17. 8 = 136, dann erhält B 104 und C 119 Theile. — Besser bezeichnet man die Anzahl der Theile des A mit x, dann

erhält B $^{13}/_{17}$. x und C $^{7}/_{8}$. x; hieraus ersehen die Schüler sogleich, daß x sowohl durch 17 als auch durch 8 theilbar sein muß, wenn man ganze Zahlen erhalten will.

Aufgabe. A erhält 300 Ctr. Waare, er theilt dieselbe in 2 ungleiche Theile, von denen er den um 30 Ctr. größern Theil behält. Von dem Reste verkauft er 10 Ctr. weniger als den dritten Theil an B und das übrige an C, den Centner zu 2 Thlr. 27 Sgr. Wie viel Waare erhält B und C und was muß jeder an A zahlen?

Auflösung. Der kleinere Theil und 30 Cent. gibt den größern, also ist das Ganze 2mal so groß als der kleinere nebst 30 oder 300 — 30 ist das 2fache des kleinern Theils u. s. w. Kürzer und bestimmter folgern wir dies, wenn wir den kleinern der beiden ungleichen Theile mit x bezeichnen; dann hat der größere x + 30 Ctr., also beide zusammen 2 x + 30. Dies macht 300 Ctr., also 2 x = 270 Ctr., x = 135. Hiervon erhält B $^{135}/_{3}$ — 10 = 45 — 10 = 35, also C 100 Ctr. B zahlt 35 (3 Thlr. — 3 Sgr) = 105 Thlr. — (30 + 5) 3 Sgr. = 101 Thlr. 15 Sgr., C 100. (3 Thlr. — 3 Sgr.) = 300 Thlr. — 10. 30 Sgr. = 290 Thlr.

Schon das Verfahren bei diesem einfachen Beispiele weist auf die Gleichungen hin, deren man sich wenigstens an höhern Lehranstalten sowohl bei Aufgaben dieser Art als bei den meisten sog. Zeit- oder Terminrechnungen und bei den Mischungsrechnungen bedienen sollte. Nehmen wir z. B. aus der letztern den einfachen Fall: In welchem Verhältnisse muß man 14 löth. und 9 löth. Silber mischen um 12 löth. zu erhalten, so folgern wir: in jeder Mark 14 löth. S. sind 2 Loth Silber zu viel also 2 Loth Kupfer zu wenig, in jeder Mark 9 löth. aber 3 Lth. Silber zu wenig, daher 3 Loth Kupfer zu viel. Wir führen die Schüler auf das gesuchte Verhältniß indem wir anschreiben:

I. Sorte: in 1 Mk. 2 L. S. z. viel. II. Sorte in 1 Mk. 3 L. S. z. wenig.
„ 2 „ 4 „ „ „ 2 „ 6 „ „
„ 3 „ 6 „ „

Nehmen wir also 3 Mark der ersten und 2 Mk. der 2ten Sorte,

so gleicht sich der Ueberschuß an Silber in dem einen gegen den Mangel in dem andern aus. Man wird nun nicht unterlassen zu fragen, ob hierbei auch das Kupfer im richtigen Verhältniß stehe? Zu diesen beiden Folgerungen gelangt man aber wieder einfacher, wenn man sich nicht scheut, unbestimmte Zahlzeichen zu gebrauchen; und man sollte derartige Fälle vielmehr als eine erwünschte Gelegenheit benutzen, um die Schüler mit Zweck und Bedeutung dieser Zeichen frühzeitiger bekannt zu machen als erst bei der ohne solche Vorbereitungen ihnen meist sehr abstrus erscheinenden Buchstabenrechnung. — In unserm Falle werden wir z. B. die noch unbestimmte Anzahl Mark von der ersten Sorte mit a, von der zweiten mit b bezeichnen und a. 2 = b. 3 setzen. Dann haben wir die Schüler bloß daran zu erinnern, daß zwei Produkte nur dann gleich sein können, wenn sie aus denselben einfachen Faktoren bestehen. — Noch größere Vortheile rücksichtlich der Kürze und Klarheit bietet diese Darstellungsweise bei zusammengesetztern Aufgaben. z. B. Wie viel Silber muß man zu 7 Mk. 12 löth. und 2 Mk. 10 löth. hinzufügen, um 14 löth. Silber zu erhalten? — Bei Aufgaben dieser Art wird man sehen, wie wenig scharf die Schüler folgern, wenn sie sich nicht dabei an die Form der Gleichung anlehnen können. Sie schließen meist auch hier: An jeder Mark des 12 löth. S. fehlen 2 Lth., also an 7 Mk. fehlen 14 Lth., an jeder Mark des 10 löth. fehlen 4 Lth, also an 2 Mk. fehlen 8 Lth., folglich setzen wir 14 Lth. + 8 Lth. reines Silber zu. Sie sollten aber folgern: Zu je 12 Lth. S. und 2 Lth. K. in der ersten Mischung müssen je 2 Lth. S., also im Ganzen 7. 2 Lth. zugesetzt werden, ferner aber auch zu je 2 Lth. Kupf., welche noch übrig sind, je 14 Lth. S., also 7. 14 Lth., zusammen 7 (14 + 2) Lth. oder 7 Mk. S. Ebenso findet man 2. 4 + 4. 14 Lth. S., welche der zweiten Mischung zugesetzt werden müssen. Sagen wir aber: die gegebenen Mischungen enthalten (7. 12 + 2. 10) Lth. S. und (7. 4 + 2. 6) Lth. Kupfer, dieses soll mit x. Mk., also mit x. 16 Lth. S. eine Mischung von (7 + 2 + x) Mk. geben, welche in jeder Mk. 14 Lth. S. und 2 Lth. K., also (9 + x). 14 Lth. S. und (9 + x). 2 Lth. K. enthalten soll, so ist klar, das einer-

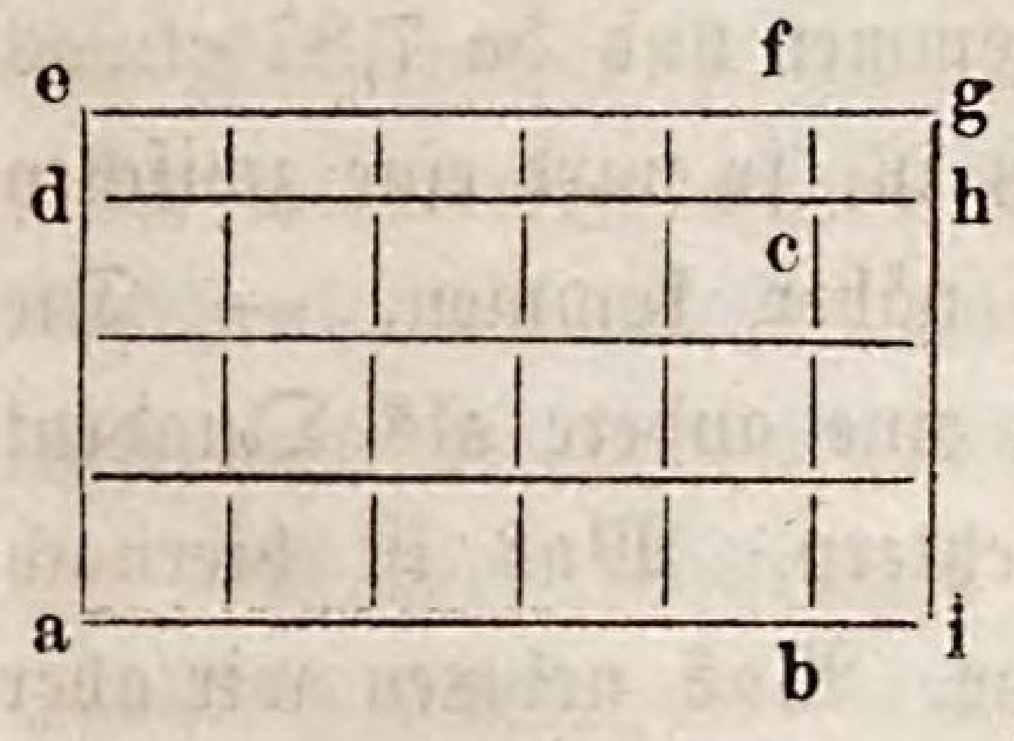
seits die Ausdrücke $(9 + x) . 16$ und $7 . 12 + 2 . 10 + x . 16$ eine und dieselbe Zahl bedeuten müssen, wie andererseits $(9 + x) . 2 = 7 . 4 + 2 . 6$ sein muß, von welchen Gleichungen wir hier die letzte als die einfachere auflösen werden.

Um endlich noch an einem Beispiele aus der sog. Zeitrechnung zu zeigen, wie sehr sich die Auflösung derartiger Aufgaben bei Anwendung von Gleichungen vereinfacht, sei zu berechnen, an welchem mittlern Termin man die Zinsen von drei Kapitalien zahlen kann, von denen das 1te zu 300 fl. vom 15 Fbr., das 2te zu 400 fl. vom 20. Juni, das 3te zu 700 fl. vom 3. Aug. an zu verzinsen sind. Nehmen wir an, der gesuchte Termin falle x Tage nach dem 1. Juni und bezeichnen wir mit a die Zinsen, welche 1 fl. an einem Tage bringt, so erleidet der Gläubiger am ersten Kapital einen Zinsverlust $= 300 (105 + x) . a$. an den beiden andern dagegen gewinnt er bez. $400 (20 - x) . a$ und $700 (63 - x) . a$. Da aber Verlust und Gewinn gleich sein sollen, so ist $300 (105 + x) . a = 400 (20 - x) . a + 700 (63 - x) . a$. Der gemeinschaftliche Faktor a hebt sich nun wieder, durfte also unbestimmt bleiben; doch kann man zum bessern Verständniß der Schüler denselben auch für einen Fall berechnen lassen. — Hätte man irrthümlicher Weise sich den mittlern Termin später als den 20ten Juni gedacht, so hätte man statt dessen die Gleichung $300 (105 + x) + 400 (x - 20) = 700 (63 - x)$ erhalten, aus welcher dieselbe Auflösung wie oben gefunden wird; nämlich zunächst $3 . 105 + 3 x + 4 x - 4 . 20 = 7 . 63 - 7 x$, hieraus $14 x = 206$, $x = 14^5/_7$.

Quadrat- und Kubikwurzeln.

Dem Ausziehen der Quadrat- und Kubikwurzel schicken wir die Berechnung des Inhalts vom Quadrat und Würfel voraus, damit die Schüler Sinn und Zweck dieser Operation richtig aufzufassen im Stande sind. Daß die zweite Potenz den Inhalt des Quadrats, die dritte den des Würfels vorstellt, müssen aber die Schüler unter Anleitung des Lehrers selbst finden. Das Verfahren beim Würfel möge hier angedeutet werden. Die Kante

desselben messe z. B. 5'', so kann man in die Grundfläche 5 Reihen von Quadratzoll jede = 5 □'' zeichnen, die Grundfläche enthält also 25 = 5^2 □''. Auf jedem Quadratzoll kann man sich einen Kubikzoll aufgestellt denken; dies gibt eine Schichte von 25 oder 5^2 Kubikzoll, die 1'' hoch ist; solcher Schichten gehen aber 5 in den Raum des Würfels, also ist sein Inhalt 5. 25 = 5^3 oder 125c''.



In ganz ähnlicher Weise kann man bei dieser Gelegenheit auch die Berechnung des Rechtecks und rechtwinklichen Parallelepipedons erklären, wobei man dieselbe auch auf den Fall ausdehnt, wenn die Maßzahlen Brüche enthalten. Ist z. B. in anstehendem Rechtecke die Länge = $5\,{}^2/_3$'', die Höhe $3\,{}^1/_2$, so hat man die einzelnen Produkte dieser Zahlen 5. 3□'' = abcd, 5. $^1/_2$ □'' = defe, $^2/_3$. 3 □'' = bchi, $^2/_3$. $^1/_2$ □'' = fchg.

Von diesen Inhaltsbestimmungen wird man nun einige Anwendungen machen lassen, mit welchen zugleich die Quadrate und Kuben der Zahlen bis 12 sowie umgekehrt wieder die Wurzeln dieser Zahlen eingeübt werden, indem man z B. die Aufgabe stellt: zu einem Würfel von 216c'' Inhalt die Länge einer Kante zu berechnen. Dies führt dann zum Begriff der Wurzel im Allgemeinen etwa in dieser Weise:

Der Boden eines Zimmers sei 31 Fuß lang und 18 Fuß breit; man möchte denselben mit Quadraten täfeln lassen, von denen jedes 62□'' groß ist. Ist dies auch möglich? Antw. Ja, weil in 31. 18□' = 31. 18. 144□'' 2. 31□'' ohne Rest enthalten ist. — Wie lange wird man aber nun eine Seite einer solchen quadratischen Tafel machen müssen? — Antw. Etwas kleiner als 8'' und viel größer als 7''. — Vielleicht 7, 9? Wie machen wir die Probe? — Das Quadrat von 7,9 ist also = 62,41, ein wenig zu groß. — Versuchen wir es mit der etwas kleinern Zahl 7,87, so finden wir $7{,}87^2$ = 61,9369, also etwas zu klein, aber näher bei 62. Werden wir wohl hoffen können den Bruch so genau zu treffen, daß das Quadrat von 7 Ganzen und einem Bruche genau = 62 Ganze ist? — Wir werden immer Ganze und einen Decimalbruch erhalten. Wenn wir aber statt eines Decimalbruchs

einen gemeinen Bruch nehmen, etwa $7^7/_8$, wird dann wohl genau 62 Ganze herauskommen können, wenn wir $(7^7/_8)^2 = {}^{63}/_8 \times {}^{63}/_8$ ausrechnen? Nein, denn der Nenner kann nie aufgehen, weil seine Faktoren sich nicht unter denen des Zählers finden. — Die gesuchte Zahl kann weder als ganze noch als gemischte Zahl genau angegeben werden, aber wir sehen doch an diesem Beispiele, daß es Zahlen gibt, die ihr sehr nahe kommen und da 7,87 etwas zu klein, 7,88 aber wieder etwas zu groß ist, so wird eine zwischen diesen Zahlen liegende derselben noch näher kommen. — Die Zahl, welche mit sich selbst multiplicirt eine andere als Quadrat gibt, heißt die Quadratwurzel dieser letztern. Was ist hiernach die Wurzel von 64 ($\sqrt{64}$)? — u. s. w. Was nehmen wir aber annähernd als $\sqrt{62}$? — Zunächst wollen wir nur lernen: die größte ganze Zahl zu suchen, deren Quadrat noch in einer gegebenen Zahl enthalten ist. — Was verstehen wir demnach vorerst unter $\sqrt{132}$?

Aufgabe. $\sqrt{2480}$ zu berechnen. = Auflösung. Wieviel Ziffern muß die Wurzel haben, etwa 3? — Antw. Nein, denn das Quadrat von 100, der kleinsten 3zifferigen Zahl, ist schon 5zifferig. Aber die Wurzel ist doch wenigstens größer als 10, also 2zifferig. Wir können daher die noch unbestimmte Wurzel mit a Z + b bezeichnen. Das Quadrat einer solchen Zahl muß aus folgenden Theilen bestehen: a^2 H + 2 ab Z + b^2 E. Die Vergleichung der einzelnen Theile mit der gegebenen Zahl 2480 wird nun zur Bestimmung der Werthe von a und b führen. Zunächst sieht man, daß das Quadrat der 1ten Ziffer als H in der gegebenen Zahl enthalten sein muß, daß sich also a^2 noch von 24 muß abziehen lassen. Die größte Zahl aber, deren Quadrat noch von 24 weggenommen werden kann, ist 4. Damit ist also a bestimmt. Nehmen wir a^2H = 16 H weg, so muß in den 88 Z des Restes 2 abZ, hier also in 88 noch 8. b enthalten sein. Der Werth von b kann kann also möglicher Weise 9 sein. Dann muß sich aber auch noch der dritte Theil der obigen Summe, nämlich b^2, hier = 81, abziehen lassen u. s. w. Statt 2 a b Z + b^2 nach einander abziehen, kann man daraus das Produkt (2 a Z + b). b, in unserm Falle 89. 9 bilden und abziehen.

Wir haben nun gelernt die größte ganze Zahl zu suchen, deren Quadrat noch in einer gegebenen 3- oder 4zifferigen Zahl enthalten ist; wie viel zifferig sind aber die Zahlen, deren Wurzeln aus 3 Ziffern bestehen? Antw. 5- und 6zifferig, denn das Quadrat von 100, der kleinsten 3zifferigen Zahl ist 1000, also die kleinste 5zifferige, während das Quadrat der kleinsten 4zifferigen, nämlich 1000^2, schon eine 7zifferige Zahl gibt.

Es sei nun $\sqrt{248009}$ zu bestimmen. Die Wurzel können wir hier wieder mit aZ + b bezeichnen, wobei a die 2 ersten Ziffern vorstellt, a bedeutet also die größte 2zifferige Zahl, deren Quadrat sich noch von den 2480 H der gegebenen Zahl abziehen läßt, da ja auch hier wieder a^2 H + 2ab Z + b^2 in der gegebenen Zahl enthalten sein muß. Diesen Werth von a haben wir aber so eben = 49 gefunden, also bleibt uns nur noch die Bestimmung der 3ten Ziffer b übrig, was durch dieselbe Betrachtung wie vorher geschehen kann. Denn auch hier muß sich 2ab Z d. i. in unserm Falle 98 Z von den 790 Z des Rests wegnehmen lassen, b kann also nicht größer als 8 sein. Um uns aber zu überzeugen, ob 8 nicht zu groß ist, müssen wir vom ganzen Rest 7909 auch den noch nicht weggenommenen Rest des Quadrats von 498, d. i. den Theil (2a Z + b). b, hier 988. 8 abziehen.

Das Vorstehende wird hinreichen, um zu zeigen, daß man, wenn man sich auf die Formel des Quadrats einer 2 gliederigen Zahl beschränkt, seinen Zweck einfacher und für die Schüler faßlicher erreicht, als mit den weitläufigen Entwickelungen von $(a + b + c \ldots)^2$ Nicht minder zweckmäßig legt man auch bei den Kubikwurzeln nur die entsprechende Formel $(aZ + b)^3$ zu Grunde. Einige Andeutungen werden dies hinlänglich klar machen.

Nachdem gezeigt ist, daß die Wurzeln aller 4- bis 6zifferigen Zahlen aus 2 Ziffern bestehen müssen, die wir wieder mit a und b bezeichnen, entwickeln wir $(aZ + b)^3 = a^3$ T + 3 a^2bH + 3 ab^2Z + 6^3 E. Vergleichen wir nun diese Summe mit der aufgegebenen Zahl, z. B. mit 97960, so ersehen wir sogleich, daß die gesuchte erste Ziffer die größte ganze Zahl sein muß, deren Kubus sich noch von den T der Zahl 97960 d. i. 97 abziehen läßt, daß also a = 4 sein muß. Da ferner in den 339 H des

Restes 3 a^2b, hier also 48 b enthalten sein muß, so kann b zunächst nicht größer als 7 sein. Um die Probe zu machen, ob 7 nicht zu groß ist, haben wir von dem ganzen Reste 33960 die Summe $3\,a^2\,b\,H + 3\,ab^2\,Z + b^3$ abzuziehen. Diese formen wir um in b. $(3\,a^2\,H + 3\,ab\,Z + b^2)$ wo die Form der Klammer sogleich das Produkt in anstehender Weise zu bilden lehrt. — Es ist also der noch abzuziehende Rest von $47^3 = 7.5689$ zu groß und man findet dann 46 als die größte Zahl, deren Kubus noch in 97960 enthalten ist.

$$\begin{array}{rcl} 3a^2\,H & = & 48\,H \\ 3ab\,Z & = & 84\,Z \\ b^2 & = & 49 \\ \hline & & 5689 \end{array}$$

Zur Bestimmung der 3zifferigen Wurzeln hängen wir auch hier noch eine Klasse mehr an eine eben vorher behandelte Zahl, nehmen also z. B. in unserm Falle 97960603. Wir haben jetzt, wenn wir wieder die Formel $a^3T + 3abH + 3\,ab^2Z + b^3$ mit der gegebenen Zahl vergleichen, unter a die größte 2zifferige Zahl zu denken, deren dritte Potenz sich noch von den T der gegebenen Zahl, also von 97960 abziehen läßt. Diese ist aber so eben = 46 gefunden worden. Um den Werth von b zu bestimmen müssen wir zuvor 3. 46^2 entwickeln. Dazu sollte man sich doch immer des Vortheils bedienen, den die eben vorausgegangene Berechnung des Ausdrucks $(3a^2\,H + 3ab\,Z + b^2)$ bietet; denn läßt man hier wieder a = 4 und b = 6 sein, so ist das 3fache Quadrat, nämlich $3\,(a\,Z + b)^2 = 3\,a^2\,H + 3\,ab\,Z + 3\,b^2$, man hat also zu dem Werthe 5556 jener Klammer den zweiten Summand 72 noch einmal und den dritten 36 zweimal hinzuzufügen. Auf das genauere Bestimmen der Wurzel führen wir die Schüler etwa in folgender Weise: $\sqrt{75}$ liegt zwischen 8 und 9, ziehen wir aber $\sqrt{75\,^1/_{16}} = \sqrt{^{1201}/_{16}}$, so finden wir dieselbe zwischen $8\,^1/_2$ und 9. In welchem unserer Fälle ist das Resultat genauer? — Wie machen wir es um $\sqrt{75}$ auch bis auf $^1/_2$ genau zu finden? — Wie wenn wir $\sqrt{75}$ bis auf 0,1 zu wissen verlangen? — Wie viel Nullen müssen wir anhängen, wenn wir die Wurzel einer Zahl bis auf die 3te Decimale genau finden wollen? — Antw. 6 oder 3. 2, denn die Wurzel soll den Nenner 1000 erhalten, also muß das Quadrat 1000^2 zum Nenner haben.

Gies, Wilhelm

Anweisung zur methodischen Behandlung des Rechenunterrichts an Volksschulen und den unteren Klassen höherer Lehranstalten

Fulda 1867